

DOMÁCÍ ÚLOHY – DVOJNÝ A TROJNÝ INTEGRÁL, FUNKCE Γ , B

M.1.1. Vypočtěte $\iint_D xy \, dx dy$, kde D je část roviny ohraničená křivkami $y = 2x - x^2$ a $y = -x$. $\left[-\frac{243}{40}\right]$

M.1.2. Vypočtěte $\iint_D (x^2 + y) \, dx dy$, kde D je oblast ohraničená křivkami $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$ a $xy = 2$, kde $x \geq 0$. $\left[\frac{17}{6}\right]$

M.1.3. Změňte pořadí integrace v dvojnásobném integrálu $\int_{-6}^2 \left(\int_{(x^2/4)-1}^{2-x} f(x, y) \, dy \right) dx$.

$$\left[\int_{-1}^0 \left(\int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x, y) \, dx \right) dy + \int_0^8 \left(\int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x, y) \, dx \right) dy \right]$$

M.1.4. Vypočtěte $\iiint_V x \, dx dy dz$, kde V je čtyřstěn ohraničený třemi souřadnými rovinami a rovinou $x + 2y + 3z = 6$. $[9]$

M.1.5. Vypočtěte $\iiint_V y \cos(x + z) \, dx dy dz$, kde V je oblast ohraničená válcovou plochou $y = \sqrt{x}$ a rovinami $y = 0$, $z = 0$, $x + z = \frac{\pi}{2}$. $\left[\frac{\pi^2-8}{16}\right]$

M.1.6. Vypočtěte $\iint_D e^{-x^2-y^2} \, dx dy$, kde D je část roviny (xy) , pro niž $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$, $y \geq 0$. $\left[\frac{\pi(e^8-1)}{2e^9}\right]$

M.1.7. Vypočtěte $\iint_D (x^2 + y^2) \, dx dy$, kde D je kruh $x^2 + y^2 \leq 2ax$. $\left[\frac{3\pi a^4}{2}\right]$

M.1.8. Užitím transformace do zobecněných polárních souřadnic odvoďte vzorec pro obsah P elipsy s poloosami a , b . $[P = \pi ab]$

M.1.9. Vypočtěte $\iiint_V (x^2 + y^2) \, dx dy dz$, kde V je oblast ohraničená plochami $x^2 + y^2 = 2z$ a $z = 2$. $\left[\frac{16\pi}{3}\right]$

M.1.10. Vypočtěte $\iiint_V x^2 \, dx dy dz$, kde V je koule $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$. $\left[\frac{4\pi R^5}{15}\right]$

M.1.11. Vypočtěte povrch části koule $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ protnuté válcem $x^2 + y^2 = ay$. $[2a^2(\pi - 2)]$

M.1.12. Vypočtěte objem části koule $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$ ležící uvnitř válce $x^2 + y^2 = R^2$. $\left[\frac{4}{3}\pi R^3(8 - 3\sqrt{3})\right]$

M.1.13. Určete souřadnice těžiště homogenní plochy ohraničené elipsou $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ a její tětivou $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$. $\left[T\left[\frac{10}{3(\pi-2)}, \frac{2}{\pi-2}\right]\right]$

M.1.14. Určete moment setrvačnosti I_z homogenního tělesa ohraničeného plochami $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$. $\left[\frac{4\pi}{15}(4\sqrt{2} - 5)\right]$

M.1.15. Určete souřadnice těžiště homogenního jehlanu, který je ohranič. souřadnými rovinami a rovinou $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. $\left[T\left[\frac{a}{4}, \frac{b}{4}, \frac{c}{4}\right]\right]$

Pozn.: U předchozích příkladů načrtněte obrázek integrační oblasti, resp. jejího průmětu do vhodné roviny.

M.1.16. Vypočtěte součin hodnot funkcí $\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) \cdot B\left(\frac{9}{4}, \frac{5}{4}\right)$. $[0.2920]$

M.1.17. Pomocí funkce Γ vypočtěte integrál $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} \, dx$. $[0.1567]$

M.1.18. Pomocí funkce Γ vypočtěte integrál $\int_0^{\infty} x^2 e^{-3x} \, dx$. $[0.0741]$

M.1.19. Pomocí funkce B vypočtěte integrál $\int_0^1 \sqrt{x-x^2} \, dx$. $[0.3927]$

M.1.20. Pomocí funkce B vypočtěte integrál $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x} \, dx$. $[0.5]$

DOMÁCÍ ÚLOHY – TEORIE POLE, KŘIVKOVÝ A PLOŠNÝ INTEGRÁL

M.2.1. Pro vektorové funkce skalární proměnné $F : \vec{r}(t) = \sqrt{t}\vec{i} + 2t\vec{j} + e^t\vec{k}$ a $G : \vec{s}(t) = t^3\vec{i} + t^{-2}\vec{j} - \ln t\vec{k}$ určete pro $t = 1$ hodnoty funkcí $F+G$, $F \cdot G$, $F \times G$ a $(G \times F)'$. $[(2, 3, 1), 3, (-e, e, -1), (2 - e, 4e - 1, -9.5)]$

M.2.2. Pro funkci $f(x, y) = \ln \frac{1+xy}{x}$ určete body $[x, y]$, kde $\text{grad } f(x, y) = \left(-\frac{16}{9}, 1\right)$. $[[\frac{3}{4}, -\frac{1}{3}], [-\frac{3}{4}, \frac{7}{3}]]$

M.2.3. Určete směr, ve kterém funkce $u = \frac{10}{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$ v bodě $A[2, 0, 1]$ klesá nejrychleji, a velikost tohoto klesání. $[-\text{grad } u(A) = (\frac{10}{9}, 0, \frac{5}{9}), |\text{grad } u(A)| = \frac{5}{9}\sqrt{5}]$

M.2.4. Určete derivaci funkce $u = x^3y^2 + z - z^2y$ v bodě $A[1, 3, 1]$ ve směru, který svírá s osou x úhel 60° , s osou y úhel 45° a s osou z úhel 60° . $[\frac{df(A)}{ds} = 11 + \frac{5}{2}\sqrt{2}]$

M.2.5. Vypočtěte divergenci a rotaci vektorové funkce $\vec{f}(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{y}{z}\right)$ v bodě $B[1, 1, 1]$. $[\text{div } \vec{f}(B) = 3, \text{rot } \vec{f}(B) = (-1, -1, -1)]$

M.2.6. Vypočtěte křivkový integrál I. druhu $\int_C \sqrt{2y} ds$, kde C je 1. oblouk cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$. $[4\pi\sqrt{a^3}]$

M.2.7. Vypočtěte křivkový integrál $\int_C (x^2 + y^2 + z^2)^{-1} ds$, kde C je křivka o rovnicích $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$. $[\frac{\sqrt{3}}{2}(1 - e^{-1})]$

M.2.8. Určete délku oblouku čtvrtiny asteroidy $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$. $[\frac{3}{2}a]$

M.2.9. Určete hmotnost oblouku paraboly $y = \frac{x^2}{2}$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$ s hustotou $\sigma(x, y) = |x|$. $[\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)]$

M.2.10. Vypočtěte křivkový integrál II. druhu $\int_C (x^2 - 2xy) dy$ po horní půlkružnici $C: x^2 + y^2 = 4$ v kladném smyslu. $[-\frac{32}{3}]$

M.2.11. Vypočtěte křivkový integrál II. druhu $\int_C x dy - y dx$, kde C je oblouk asteroidy $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$. $[\sqrt{5} \ln 2]$

M.2.12. Vypočtěte křivkový int. II. druhu $\int_C (x + y) dx$, kde C je lomená čára OBA , $O[0, 0]$, $A[2, 2]$, $B[2, 0]$. $[2]$

M.2.13. Určete kmenovou fci $P(x, y)$, jestliže $dP = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) dx + \left(\frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}\right) dy$. $[\ln x + 2 \ln y + \frac{x}{y} - 1 + C]$

M.2.14. Ukažte, že křivkový integrál II. druhu $\int_C (x + y) dx + (x - y) dy$ nezávisí na integrační cestě a vypočtěte jeho hodnotu na křivce C spojující body $[0, 0]$ a $[\pi, \pi]$. $[\pi^2]$

M.2.15. Ukažte, že křivkový integrál II. druhu $\int_C 2xy dx + x^2 dy$ nezávisí na integrační cestě a vypočtěte jeho hodnotu na křivce C spojující body $[1, 1]$ a $[2, 4]$. $[15]$

M.2.16. Vypočtěte práci síly $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j}$ po cykloidě $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. $[8\pi^2]$

M.2.17. Vypočtěte plošný integrál I. druhu $\iint_S (y^2 - z^2) dS$, kde S je horní polovina kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $r \geq 0$. $[\frac{5\pi r^4}{3}]$

M.2.18. Vypočtěte moment setrvačnosti I_z plochy S se specifickou hustotou $\rho \equiv 1$, která vznikne z kuželové plochy $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$, po odříznutí válcovou plochou s řídicí křivkou $x^2 + y^2 = 4$. $[\frac{2\pi}{15}(50\sqrt{5} + 2)]$

M.2.19. Užitím plošného integrálu II. druhu vypočtěte tok Q vektoru $\vec{F} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ parabolickou plochou $\vec{S}: z = 1 - x^2 - y^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ orientovanou tak, že normálové vektory svírají s kladnou poloosou z ostrý úhel. $[\frac{16+3\pi}{12}]$

M.2.20. Vypočtěte tok Q vektoru $\vec{F} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ kuželovou plochou $\vec{S}: z^2 = (x^2 + y^2)/4$, $0 \leq z \leq 1/2$, orientovanou tak, že její normálové vektory svírají s kladnou poloosou z tupý úhel. $[\frac{\pi}{2}]$

DOMÁCÍ ÚLOHY – KOMPLEXNÍ FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ

M.3.1. Znázorněte množinu všech bodů v Gaussově rovině, pro které platí nerovnosti $|z - 1| \leq \operatorname{Re} z$ a $|z - 1| - |z + 1| < 4$. [průnik parabolické a eliptické části roviny daný nerovnostmi $y^2 \leq 2x + 1$ a $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} < 1$]

M.3.2. Určete obraz čtverce $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ při zobrazení $w = z^2$. [vnitřek oblasti ohraničené parabolami $u = \frac{v^2}{4} - 1$, $u = 1 - \frac{v^2}{4}$ a přímkou $v = 0$]

M.3.3. Určete kořeny rovnice $z^6 - 1 = 0$ a znázorněte je v Gaussově rovině. $[\cos k\frac{\pi}{3} + j \sin k\frac{\pi}{3}$, kde $k = 0, 1, \dots, 5$; obrazy kořenů tvoří vrcholy pravidelného šestiúhelníka]

M.3.4. Určete kořeny rovnice $\cos z = 2$ a znázorněte je v Gaussově rovině. $[z_1^k = 2k\pi - j \ln(2 + \sqrt{3})$, $z_2^k = 2k\pi - j \ln(2 - \sqrt{3})$, $k \in \mathbb{Z}$; obrazy kořenů leží na rovnoběžkách s reálnou osou]

M.3.5. Pro $z = 1 + 3\pi j$ najděte všechny hodnoty funkce $\log(e^z)$ a určete, pro kterou z nich platí $\log(e^z) = z$. $[\log(e^z) = 1 + j(\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$; $\log(e^z) = z$ pro $k = 0$, tj. $\log(e^{1+3\pi j}) = 1 + 3\pi j$]

M.3.6. Určete všechny hodnoty funkce j^j a ukažte, že jsou reálné. $[j^j = e^{-(\pi/2+2k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$]

M.3.7. Vypočtěte $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2+1}{z^3+jz^2-z-j} \cdot [j]$

M.3.8. Určete regulární funkci $f: w = u + jv$, pro kterou platí $u = 2x^2 - 2y^2 - 6xy + x - y + 3$ a $f(j) = j$. $[f(z) = (2 + 3j)z^2 + (1 + j)z + 3 + 3j]$

M.3.9. Určete body, ve kterých je funkce $f(z) = z\bar{z} = |z|^2$ diferencovatelná. $[z = 0]$

M.3.10. Určete body, ve kterých má funkce $f(z) = -y + (x - 1)^2 + j[x(y - 1)^2 + x]$ derivaci a vyčíslete ji. $[f(1 + j) = j]$

M.3.11. Vypočtěte derivaci funkce $f(z) = z^2 + \bar{z}^2 + 2\bar{z}$ ve všech bodech, kde existuje. $[f(-1) = -2]$

M.3.12. Vypočtěte integrál $\int_{AB} (x^2 + y^2 j) dz$, kde AB je úsečka spojující body $A(1+j)$ a $B(2+3j)$. $[-\frac{19}{3} + 9j]$

M.3.13. Vypočtěte integrál $I = \int_{CD} \bar{z}^2 dz$, kde křivka CD je část paraboly z bodu $C(j)$ do bodu $D(1 + 2j)$. $[I = -\frac{23}{15} + \frac{32}{15} - \frac{3}{2}j - \frac{11}{6}j = \frac{3}{5} - \frac{10}{3}j]$

M.3.14. Pomocí Cauchyovy věty pro vícenásobně souvislou oblast vypočtěte $\int_C \frac{2z - 1 - j}{(z - 1)(z - j)} dz$, kde C je kružnice $|z| = 2$. $[4\pi j]$

M.3.15. Pomocí Cauchyovy reziduové věty vypočtěte $\int_C \frac{z^2}{z^3 - 2z^2 + z - 2} dz$, kde $C: |z| = 3$. $[2\pi j]$

M.3.16. Pomocí Cauchyovy reziduové věty vypočtěte $\int_C \frac{dz}{z^3(z^2 + 4)^2}$, kde C je kružnice $|z - 2| = 3$. $[0]$

M.3.17. Pomocí zobecněné Cauchyovy integrální věty vypočtěte $\int_C \frac{z^3 + 2z + 1}{(z - 1)^3} dz$, kde C je kružnice $|z| = 2$. $[6\pi j]$

M.3.18. Funkci $f(z) = e^z$ rozložte a) do Maclauriovy řady, b) do Taylorovy řady v okolí bodu $z = j$.
[a) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$, b) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^j}{n!} (z - j)^n$]

M.3.19. Funkci $f(z) = \frac{1}{2z - 5}$ rozložte v okolí bodu a) $z = 0$, b) $z = \infty$ do Laurentovy řady a určete oblast konvergence. [a) $f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} z^{n-1}}{5^n}$, oblast konvergence řady je kruh $|z| < \frac{5}{2}$, b) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{2^n z^n}$, oblast konvergence řady je vnějšek kruhu $|z| > \frac{5}{2}$]

M.3.20. Funkci $f(z) = \frac{1}{(z - 1)(z - 3)}$ rozložte na mezikružích $1 < |z| < 3$ do Laurentovy řady.
 $[f(z) = -\frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{3^n} \right)]$

DOMÁCÍ ÚLOHY – LAPLACEOVA, Z A FOURIEROVA TRANSFORMACE

• LAPLACEOVA TRANSFORMACE

M.4.1. Užitím základních vlastností Laplaceovy transformace určete obraz

a) $F(p) = \mathcal{L}\{e^t[u(t) - u(t-1)]\}$, b) $G(p) = \mathcal{L}\{e^{-t} \sin \frac{t}{2}\}$, kde $u(t)$ je funkce jednotkového skoku, pro kterou platí $\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{p}$. [a) $F(p) = \frac{1-e^{1-p}}{p-1}$, b) $G(p) = \frac{2}{4(p+1)^2+1}$]

M.4.2. Pomocí věty o derivaci obrazu určete obraz $F(p) = \mathcal{L}\{t^2 \cos 2t\}$. [$\frac{2p^3-24p}{(p^2-4)^3}$]

M.4.3. Pomocí konvoluce určete předmět $f(t)$ k obrazu $F(p) = \frac{1}{(p-4)(p-5)}$. [$f(t) = e^{4t}(e^t - 1)$]

M.4.4. Užitím Heavisideovy věty o rozkladu určete předmět $f(t)$ k obrazu $F(p) = \frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}$. [$f(t) = e^t - e^{-t}(\cos 2t - \frac{3}{2} \sin 2t)$]

M.4.5. Užitím Laplaceovy transformace určete partikulární řešení diferenciální rovnice $y''(t) - y'(t) - 6y(t) = 2$, $y(0+) = 1$, $y'(0+) = 0$. [$y(t) = \frac{1}{15}(12e^{-2t} + 8e^{3t} - 5)$]

M.4.6. Užitím Laplaceovy transformace určete partikulární řešení diferenciální rovnice $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 8 \cos t - 6 \sin t$, $y(0+) = 0$, $y'(0+) = 1$. [$y(t) = 2 \cos t + \sin t - 3e^{-t} + e^{-3t}$]

M.4.7. Užitím Laplaceovy transformace řešte počáteční úlohu $y'''(t) - y''(t) + y'(t) - y(t) = e^t$, $y(0+) = 0$, $y'(0+) = 1$, $y''(0+) = -1$. [$y(t) = \frac{1}{2}((t-2)e^t + 2 \cos t + 3 \sin t)$]

M.4.8. Užitím Laplaceovy transformace řešte počáteční úlohu $y^{(4)}(t) - 2y''(t) + y(t) = e^t$, $y(0+) = 1$, $y'(0+) = y''(0+) = 0$, $y'''(0+) = -1$. [$y(t) = \frac{e^t}{16}(2t^2 - 12t + 15) - \frac{e^{-t}}{16}(2t - 1)$]

M.4.9. Užitím Laplaceovy transformace určete partikulární řešení soustavy diferenciálních rovnic 1. řádu $x'(t) = 2x(t) + y(t) + t$, $y'(t) = x(t) + 2y(t) - 1$, $x(0+) = 0$, $y(0+) = 1$. [$x(t) = \frac{1}{18}(7e^{3t} + 9e^t - 12t - 16)$, $y(t) = \frac{1}{18}(7e^{3t} - 9e^t + 6t + 20)$]

M.4.10. Užitím Laplaceovy transformace určete partikulární řešení soustavy diferenciálních rovnic 1. řádu $2x'(t) + y(t) = \cos t$, $y'(t) - 2x(t) = 3 \sin t$, $x(0+) = 0$, $y(0+) = 1$. [$x(t) = t \cos t - \sin t$, $y(t) = 2t \sin t + \cos t$]

M.4.11. Užitím Laplaceovy transformace určete partikulární řešení integrodiferenciální rovnice $y'(t) + 2y(t) + 2 \int_0^t y(\tau) d\tau = 1$, $y(0+) = 0$. [$y(t) = e^{-t} \sin t$]

• Z TRANSFORMACE

M.4.12. Určete obraz $F(z)$ posloupnosti $\{f_n\} = \{\frac{1}{2^n}\}$ v Z transformaci. [$F(z) = \mathcal{Z}\{f_n\} = \frac{2z}{2z-1}$]

M.4.13. Určete předmět $\{f_n\}$ k obrazu $F(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$ v Z transformaci. [$f_0 = f_1 = 0$, $f_n = n - 2, n \geq 2$]

M.4.14. Užitím Z transformace řešte rekurentní rovnici $\{y_{n+1}\} - 3\{y_n\} = \{4\}$ s počáteční podmínkou $y_0 = 1$. [$y_n = -2 + 3^{n+1}, n \geq 0$]

M.4.15. Užitím Z transformace řešte rekurentní rovnici $\{y_{n+2}\} + 2\{y_{n+1}\} + \{y_n\} = \{0\}$ s počátečními podmínkami $y_0 = 1$, $y_1 = 1$. [$y_n = (-1)^n(1 - 2n), n \geq 0$]

• FOURIEROVA TRANSFORMACE

M.4.16. Určete spektrum (Four. obraz) funkce $f(t) = 3, t \in (0, 2)$, $f(t) = 0$ jinde. [$F(\omega) = \frac{3j}{\omega}(2e^{-2j\omega} - 1)$]

M.4.17. Určete obraz $F(\omega)$ funkce $f(t) = 2e^{-\frac{|t|}{2}}$ ve Fourierově transformaci. (Při výpočtu limity typu $\lim_{A \rightarrow \infty} e^{(a+j\omega)A}$ užíjte skutečnosti, že $\lim_{A \rightarrow \infty} e^{-aA} = 0$ a $e^{-j\omega A}$ je ohraničená funkce.) [$\frac{8}{1+4\omega^2}$]

M.4.18. Určete Fourierův obraz $F(\omega)$ signálu $f(t) = \begin{cases} \sin t, & t \in (-\pi, \pi), \\ 0, & \text{jinde.} \end{cases}$ (Při integraci i úpravě $F(\omega)$ užíjte Eulerův vzorec a součtové vzorce.) [$\frac{2j \sin \pi\omega}{\omega^2 - 1}$]

M.4.19. Určete předmět $f(t)$ k Fourierovu obrazu $F(\omega) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}$, $a > 0$. [$f(t) = \frac{1}{t^2+a^2}$]

M.4.20. Určete předmět $f(t)$ k Four. obrazu $F(\omega) = 3^{-2|\omega|}$. ($F(\omega)$ vyjádřete pomocí základu e) [$\frac{2 \ln 3}{\pi(4 \ln^2 3 + t^2)}$]

DOMÁCÍ ÚLOHY – POČET PRAVDĚPODOBNOSTI

M.5.1. Střelec vystřelí třikrát do terče. Pravděpodobnost zásahu při 1. výstřelu je 0.4, při 2. výstřelu 0.5 a při 3. výstřelu 0.7. Určete pravděpodobnost a) právě 1 zásahu, b) alespoň 1 zásahu. [a) 0.36, b) 0.91]

M.5.2. Házeme šestkrát mincí. Jaká je pravděpodobnost, že padne a) více rubů než líců, b) stejný počet rubů jako líců? [a) 0.34375, b) 0.3125]

M.5.3. Z úplné sady kostek domina s 1 až 6 oky vybereme namátkou 5 kostek. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi bude alespoň jedna kostka se 6 oky? [0.8524]

M.5.4. Máme tři stejné váčky. V 1. váčku jsou 2 stříbrné a 3 zlaté mince, v 2. váčku jsou 3 stříbrné a 1 zlatá mince, ve 3. váčku jsou 2 stříbrné a 2 zlaté mince. a) Určete pravděpodobnost vytažení stříbrné mince. b) Byla-li vytažena zlatá mince, určete pravděpodobnost, že pocházela z 1. váčku. [a) 0.55, b) 0.4]

M.5.5. Kolikrát je třeba hodit kostkou, aby pravděpodobnost padnutí šestky byla aspoň 0.9? [aspoň 13×]

M.5.6. Mezi 10 kartami jsou 4 esa. Určete pravděpodobnost, že při jedenácti náhodných výběrech nebude eso vytaženo více než třikrát. [0.1899]

M.5.7. V terénu je rozmístěno 5 radiostanic. Vzhledem k poruchám v atmosféře a vzdálenosti od základny je pravděpodobnost navázání spojení základny s každou radiostanicí 0.8. Určete pravděpodobnost, že spojení bude navázáno s a) nejvýše 4 radiostanicemi, b) alespoň 2 radiostanicemi. [a) 0.67232, b) 0.99328]

M.5.8. V krabici jsou 3 vadné a 7 dobrých žárovek. Náhodně vybereme 3 žárovky. Určete pravděpodobnost, že a) alespoň 1 žárovka bude dobrá, b) všechny 3 žárovky jsou dobré, byla-li 1. vytažená žárovka dobrá. [a) 0.9916, b) 0.416]

M.5.9. Pravděpodobnost zásahu lodi torpédem je 0.3. Kolik torpéd musí být vypáleno, aby pravděpodobnost a) alespoň 1 zásahu byla větší než 0.9, b) 2 zásahů byla větší než 0.3? [a) $n = 7$, b) $n \in \{5, 6, 7\}$]

M.5.10. Pravděpodobnost, že výrobek bude vyhovovat technologickým požadavkům, je 0.9. Popište rozdělení počtu nevyhovujících mezi 3 výrobky a) pravděpodobnostní funkcí ve formě tabulky, b) pravděpodobnostní funkcí ve formě vzorce, c) grafem distribuční funkce. [a) 0|0.729, 1|0.243, 2|0.027, 3|0.001]

M.5.11. Náhodná proměnná má pravděpodobnostní funkci $P(x) = (3/7) \cdot 0.7^x$ pro $x = 1, 2, 3, \dots$, $P(x) = 0$ jinak. Jaká je pravděpodobnost, že a) $X > 4$, b) $X \in (1, 4)$? [a) 0.2401, b) 0.357]

M.5.12. Hustota rozdělení pravděpodobnosti spojitě náhodné proměnné X je funkce $f(x) = 1/[a(1+x^2)]$. a) Určete koeficient a , načrtněte graf hustoty $f(x)$. b) Určete pravděpodobnost toho, že náhodná proměnná X nabývá hodnot z intervalu $(-1, 1)$. [a) $a = \pi$, b) 0.5]

M.5.13. Hustota rozdělení pravděpodobnosti spojitě náhodné proměnné X je funkce $f(x) = 0.5 \cdot e^{-|x|}$. Určete a) střední hodnotu $E(X)$, b) směrodatnou odchylku $\sigma(X)$. [a) $E(X) = 0$, b) $\sigma(X) = \sqrt{2}$]

M.5.14. V urně je 6 bílých a 4 černé koule. Z urny se pětkrát náhodně vytáhne koule, zjistí se její barva a vrátí se zpět. Určete zákon rozdělení náhodné proměnné X označující počet vytažených bílých koulí, dále vypočtete charakteristiky $E(X)$ a $D(X)$. [$E(X) = 3.0$, $D(X) = 1.2$]

M.5.15. Vozidlo projíždí křižovatky, dokud nezůstane stát na červenou. Pravděpodobnost projetí každé křižovatky na zelenou je 0.4. Určete zákon rozdělení pravděpodobnosti, střední hodnotu a rozptyl náhodné proměnné X označující počet křižovatek projetých na zelenou. [geometrické, $E(X) = 0.6$, $D(X) = 1.1$]

M.5.16. V sérii 50 výrobků je 5 zmetků. Ze série jsou náhodně vybrány 3 výrobky. Určete zákon rozdělení pravděpodobnosti, střední hodnotu a rozptyl náhodné proměnné X označující počet zmetků ve výběru, jestliže výrobky při kontrole zpět a) vracíme, b) nevracíme. [a) binomické, $E(X) = 0.3$, $D(X) = 0.27$, b) hypergeometrické, $E(X) = 0.3$, $D(X) = 0.259$]

M.5.17. Dokažte, že rozptyl náhodné proměnné X s Poissonovým rozdělením je $D(X) = \lambda$. ($D(X) = E(X^2) - E^2(X)$, při výpočtu $E(X^2)$ zkraťte faktoriál, x zapište jako $x+1-1$ a sumu jako součet 2 sum.)

M.5.18. Určitá radioaktivní látka vyzařuje průměrně 30 částic α za minutu. Vypočtete pravděpodobnost, že v průběhu jedné sekundy vyzáří látka více než dvě částice α . [0.014388]

M.5.19. Počet štěňat při vrhu border kolie má normální rozdělení se střední hodnotou $\mu = 4$ a směrodatnou odchylkou $\sigma = 1$. Vypočtete pravděpodobnost, že se narodí alespoň 6 štěňat. [0.02275]

M.5.20. Spojitá náhodná proměnná X má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. S přesností 10^{-2} určete pravděpodobnosti náhodných jevů $X \in (\mu, \mu + \sigma)$, $X \in (\mu + \sigma, \mu + 2\sigma)$, $X \in (\mu + 2\sigma, \mu + 3\sigma)$. [0.34, 0.14, 0.02]