DOMÁCÍ ÚLOHY – NEKONEČNÉ A FOURIEROVY ŘADY (FSI VUT)

Určete součet číselné řady (symbol $\sum$ v textu znamená $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$):

1. $\sum \dfrac{4}{(n+6)(n+2)}$. $\langle a_1 = \dfrac{4}{3.7} = \dfrac{7-3}{3.7} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{7},\ a_2 = \dfrac{4}{4.8} = \dfrac{8-4}{4.8} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8}, \ldots\rangle$ $[s = \frac{57}{60}]$

2. $\sum (-1)^n \dfrac{2n+1}{n(n+1)}$. $[s = -1]$

Pomocí vhodného kritéria rozhodněte o konvergenci číselné řady:

3. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!}$. $\langle$srovnávací kritérium$\rangle$ [konverguje absolutně]

4. $\sum \sin \dfrac{\pi}{2^n}$. $\langle$podílové kritérium, užijte substituci $\alpha = \dfrac{\pi}{2^{n+1}}\rangle$ [konverguje]

5. $\sum \dfrac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$. $\langle$odmocninové kritérium$\rangle$ [konverguje]

6. $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$. $\langle$Leibnizovo a srovnávací kritérium$\rangle$ [konverguje relativně]

7. $\sum \dfrac{\sqrt[n]{\mathrm{e}}}{n^2}$. $\langle$integrální kritérium$\rangle$ [konverguje]

8. Určete obor konvergence mocninné řady $\sum (-3)^{n-1}(x+2)^{n-1}$. $[(-\frac{7}{3}; -\frac{5}{3})]$

9. Určete obor konvergence a součet mocninné řady $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1}$. $[\langle -1; 1\rangle; s(x) = \arctan x]$

10. Určete součet mocninné řady $\sum (-1)^{n+1}(2n-1)x^{2n-2}$. $[s(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}]$

11. Určete Maclaurinovu řadu funkce $\sinh x$ a její obor konvergence. $[\sinh x = \sum \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}; (-\infty; \infty)]$

12. Pomocí mocninné řady vypočtěte integrál $\displaystyle\int_0^x \sin t^2 \,\mathrm{d}t$. $[\sum \frac{(-1)^{n+1}}{(4n-1)(2n-1)!} x^{4n-1}]$

13. Pomocí mocninné řady určete řešení diferenciální rovnice $y''(x) = x^2 y(x); y(0) = 1, y'(0) = 1$.
$[y(x) \approx 1 + x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{672}]$

14. Určete rozvoj funkce $f(x) = \dfrac{\pi^2}{12} - \dfrac{x^2}{4},\ x \in \langle -\pi, \pi)$ do Fourierovy řady. $[f(x) \approx \cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \ldots]$

15. Určete rozvoj funkce $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle -\pi; 0\rangle \\ -2, & x \in (0; \pi) \end{cases}$ do Fourierovy řady.

$[f(x) \approx -\frac{1}{2} - \frac{6}{\pi}(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots)]$

16. Určete a) reálný, b) komplexní tvar Fourierovy řady periodické funkce $f(t) = |t| - \dfrac{\pi}{2},\ t \in \langle -\pi, \pi)$, s periodou 2π. $[a) f(t) \approx -\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos t}{1^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \cdots\right),\ b) f(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{jkt}, c_0 = 0, c_k = -\frac{2}{k^2\pi}]$

17. Funkci $f(t) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{t}{2},\ t \in \langle 0, \pi)$, rozložte do a) sinové, b) kosinové trigonometrické řady.
$\left[a) f(t) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nt}{2n},\ b) f(t) \approx \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2}\right]$

DOMÁCÍ ÚLOHY – OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE (FSI VUT)

18. Znázorněte směrové pole diferenciální rovnice $y' = y \operatorname{cotg} x$, $x \in (0;\pi)$. Pomocí směrového pole znázorněte přibližně řešení (tzv. integrální křivku), které prochází bodem $A[\frac{\pi}{4}, 1]$. [lin. elementy leží na křivkách $y = k \operatorname{tg} x$, int. křivka je podobná části kosinusoidy]

19. Sestavte diferenciální rovnici nejnižšího řádu, aby jejím řešením byly funkce $y = \dfrac{x}{C+x}, x \neq -C, C \in \mathbf{R}$.
$\langle$derivujte funkci podle x a dosaďte za konstantu $C\rangle$ $[y' = \frac{y(y-1)}{x}]$

20. Separací proměnných určete obecné řešení rovnice $xyy' + 4 - y^2 = 0$ a znázorněte partikulární řešení procházející bodem $B[-2,-4]$. $[y = \pm\sqrt{Cx^2+4}, Cx^2+4>0, x\neq 0$; hyperbola $y = -\sqrt{3x^2+4}]$

21. Substitucí $u = \frac{y}{x}$ řešte rovnici s homogenní fcí $(xy' - y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x$, $y(1) = 0$. $[\ln(x^2+y^2) = 2\frac{y}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}]$

22. Substitucí $u = 2x + y$ určete obecné řešení rovnice $y' = \dfrac{2x+y-1}{2(2x+y)+5}$. $[10y - 5x + 7\ln|10x+5y+9| = C]$

23. Substitucemi $u = x - 5$, $v = y - 1$ a poté substitucí $z = \frac{v}{u}$ určete obecné řešení rovnice $y' = \dfrac{2x-y+9}{x-3y+2}$.
$[2(x+5)^2 - 2(x+5)(y+1) + 3(y+1)^2 = C]$

24. Určete řešení Bernoulliovy diferenciální rovnice $y' - xy = -y^3 \mathrm{e}^{-x^2}$. $[y^2 = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x+C}]$

25. Určete obecné řešení exaktní rovnice $(2x + y\cos xy \mathrm{e}^{\sin xy})dx + x\cos xy \mathrm{e}^{\sin xy} dy = 0$. $\langle$při integraci užijte substituci $t = \sin xy\rangle$ $[\mathrm{e}^{\sin xy} + x^2 = C]$

26. Metodou variace konstanty určete part. řešení lineární rovnice $y'\cos x - y\sin x = 1$, $y(\pi) = -2\pi$. $[y = \frac{\pi+x}{\cos x}]$

27. Metodou variace konstanty řešte Cauchyovu úlohu $y' = x^3 - 2xy$, $y(0) = 1$. $\langle$při integraci užijte substituci $t = x^2\rangle$ $[y = \frac{1}{2}(x^2 - 1 + 3\mathrm{e}^{-x^2})]$

28. Rychlost ochlazování tělesa vzduchem je přímo úměrná rozdílu teploty tělesa a teploty vzduchu. Najděte závislost teploty T tělesa na čase t, je-li teplota vzduchu 20°C a těleso se za 1200 s ochladí ze 100°C na 60°C. Za jak dlouho se ochladí na 30°C? $\langle$řešte rovnici $\frac{dT}{dt} = k(T-20)$, $T(0) = 100, T(1200) = 60\rangle$ $[T(t) = 20 + 80\cdot 2^{-\frac{t}{1200}}$, pro $T = 30$°C je $t = 3600$ s$]$

29. Projektil o hmotnosti m je vystřelen kolmo vzhůru z povrchu Země. Jakou počáteční rychlost v_0 musí mít, aby opustil gravitační pole Země? Předpokládejte, že na projektil působí pouze gravitační síla $F = -\dfrac{km}{x^2}$, kde k je konstanta, x je vzdálenost od středu Země. $\langle ma = -\frac{km}{x^2}, a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$, odtud $\frac{v^2}{2} = \frac{k}{x} + C$; protože $v(6378 \text{ km}) = v_0$, dostáváme $C = \frac{v_0^2}{2} - \frac{k}{6{,}378.10^6}$, tedy $v^2 = \frac{2k}{x} + v_0^2 - \frac{k}{3{,}189.10^6}$; pro $x \to \infty$ se $v^2 \to v_0^2 - \frac{k}{3{,}189.10^6}$; pro k na povrchu Země platí $9{,}81 = g = \frac{k}{x_0^2} = \frac{k}{(6{,}378.10^6)^2}$, pro v_0 platí $v^2 > 0$, tj. $v_0^2 > \frac{k}{3{,}189.10^6}\rangle$ $[v_0 > 11187 \text{ m.s}^{-1}]$

30. Určete obecné řešení homogenní rovnice $4y''' - 8y'' + a(y' - 2y) = 0$, kde $a \in \{-1; 1\}$.
[pro $a = -1: y(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + C_3\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$, pro $a = 1: y(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\cos\frac{x}{2} + C_3\sin\frac{x}{2}$]

31. Metodou snížení řádu určete obecné řešení rovnice $y'' + \dfrac{2}{x}y' + y = 0$, je-li jedno řešení $y_0 = \dfrac{\sin x}{x}$.
$\langle y_1(x) = \frac{\sin x}{x}u(x), u'' + 2\frac{\cos x}{\sin x}u' = 0$, subst. $w = u', w(x) = \frac{1}{\sin^2 x}\rangle$ $[y_1(x) = -\frac{\cos x}{x}, y(x) = C_1\frac{\sin x}{x} + C_2\frac{\cos x}{x}]$

32. Metodou variace konstant řešte rovnici $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$. $[y = (C_1 - x)\cos x + (C_2 + \ln|\sin x|)\sin x]$

33. Metodou variace konstant řešte rovnici $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1+x^2}$. $[y = \mathrm{e}^x(C_1 + C_2x - \ln\sqrt{1+x^2} + x \operatorname{arctg} x)]$

34. Řešte rovnici se speciální pravou stranou $y'' - 4y' + 4y = 2x\mathrm{e}^{2x}$. $[y = (C_1 + C_2x + \frac{x^3}{3})\mathrm{e}^{2x}]$

35. Řešte rovnici $y'' + 5y' - 6y = 3 + \mathrm{e}^x + \sin x$. $[y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-6x} - \frac{1}{2} + \frac{x}{7}\mathrm{e}^x - \frac{1}{74}(5\cos x + 7\sin x)]$

36. Řešte rovnici tlumených harmonických kmitů $y'' + 2py' + m^2y = 0$, $p > 0, m > 0$ a proveďte diskusi jejího obecného řešení. [pro $p^2 > m^2$ (silně tlumený pohyb) je $y(t) = \mathrm{e}^{-pt}(C_1\mathrm{e}^{\alpha t} + C_2\mathrm{e}^{-\alpha t}), \alpha = \sqrt{p^2 - m^2}$; pro $p^2 = m^2$ (kritický tlumený pohyb) je $y(t) = \mathrm{e}^{-pt}(C_1 + C_2t)$; pro $p^2 < m^2$ (slabě tlumený periodický pohyb) je $y(t) = \mathrm{e}^{-pt}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t), \beta = \sqrt{m^2 - p^2}$]

37. Určete přibližnou hodnotu partikulárního řešení rovnice $y' = y^3$ s počáteční podmínkou $y(0) = 0{,}5$ v bodě $x = 0{,}6$ s krokem $h = 0{,}3$. Řešte *a*) Eulerovou metodou, *b*) metodou Rungovou – Kuttovou 4. řádu, *c*) exaktně (separací proměnných) a výsledky porovnejte. [*a*) 0,584; *b*) 0,597; *c*) 0,598]

38. Eliminační metodou řešte soustavu rovnic $y_1' = 4y_1 - 3y_2 + \sin x$, $y_2' = 2y_1 - y_2 - 2\cos x$.
$[y_1 = C_1\mathrm{e}^x + 3C_2\mathrm{e}^{2x} + \cos x - 2\sin x,\ y_2 = C_1\mathrm{e}^x + 2C_2\mathrm{e}^{2x} + 2\cos x - 2\sin x]$

39. Eulerovou metodou (pomocí vl. čísel a vl. vektorů) řešte soustavu rovnic $y_1' = y_1 + y_2$, $y_2' = 8y_1 - y_2$, $y_1(0) = y_2(0) = 1$. $[y_1 = \frac{5}{6}\mathrm{e}^{3x} + \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-3x},\ y_2 = \frac{5}{3}\mathrm{e}^{3x} - \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-3x}]$

40. Eliminační metodou řešte soustavu rovnic $y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3$, $y_2' = y_1 + y_2 + y_3$, $y_3' = 4y_1 - y_2 + 4y_3$.
$[y_1 = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x} + C_3\mathrm{e}^{5x},\ y_2 = C_1\mathrm{e}^x - 2C_2\mathrm{e}^{2x} + C_3\mathrm{e}^{5x},\ y_3 = -C_1\mathrm{e}^x - 3C_2\mathrm{e}^{2x} + 3C_3\mathrm{e}^{5x}]$