# **DOMÁCÍ ÚKOLY** – VEKTOR. PROSTORY, SOUČINY VEKTORŮ, ANAL. GEOMETRIE V $\mathbb{R}^3$

**2.1.1.** Ukažte, že vektory $\vec{e}_1 = (2, 1, -3)$, $\vec{e}_2 = (3, 2, -5)$, $\vec{e}_3 = (1, -1, 1)$ tvoří bázi $B$ 3-rozměrného vektorového prostoru, a určete souřadnice vektorů $\vec{x} = (6, 2, -7)$, $\vec{y} = (3, 3, -7)$ v této bázi. [$\vec{x}_B = (1, 1, 1)$, $\vec{y}_B = (2, 0, -1)$]

**2.1.2.** Ukažte, že polynomy $f_1(t) = t^3+2t^2-t-2$, $f_2(t) = 2t^3+3t^2-1$, $f_3(t) = t^3+2t^2+t+3$, $f_4(t) = t^3+3t^2-t$ tvoří bázi vektorového prostoru polynomů nejvýše třetího stupně, a určete souřadnice polynomu $g(t) = 7t^3+14t^2-t+2$ v této bázi. [$g_B(t) = 2t^2 + t + 2$]

**2.1.3.** Dokažte, že polynomy $P_1(x) = x^3 + 2x^2, P_2(x) = x^2 + 2x, P_3(x) = x + 2, P_4(x) = 2x^3 + 16$ nemohou tvořit bázi vektorového prostoru polynomů nejvýše třetího stupně. [ jsou lineárně závislé ]

**2.1.4.** Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory $\vec{a} = (-1, 2, 3), \vec{b} = (2, -4, 2), \vec{c} = (3, -3, 1), \vec{d} = (-8, 10, 6)$. Dokažte, že trojice vektorů $\mathcal{A} = \{\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}, \mathcal{B} = \{\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}\}, \mathcal{C} = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\}, \mathcal{D} = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ tvoří bázi $\mathbb{R}^3$ a určete souřadnice zbývajících vektorů vzhledem k těmto bázím. [$\vec{a}_\mathcal{A} = (-\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}), \vec{b}_\mathcal{B} = (-6, 4, 2), \vec{c}_\mathcal{C} = (\frac{3}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}), \vec{d}_\mathcal{D} = (3, \frac{1}{2}, -2)$]

Pro následující vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ určete skalární součin $\vec{a} \cdot \vec{b}$, úhel $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ obou vektorů, vektorový součin $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ a smíšený součin $\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a})$:

**2.1.5.** $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$, [0, 90°, $(0, 0, -5)$, $-25$]

**2.1.6.** $\vec{a} = (1, 2, -3)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$, [$-1$, $100°53'$, $(5, -1, 1)$, 27]

**2.1.7.** $\vec{a} = (3, 0, 4)$, $\vec{b} = (2, -1, 1)$ [10, $35°15'$, $(4, 5, -3)$, 50]

**2.1.8** Určete vektor $\vec{b}_{\vec{a}}$, který je tzv. projekcí vektoru $\vec{b} = (6, 3, 2)$ na vektor $\vec{a} = (1, -2, -2)$ [načrtněte obrázek; vydělením rovnosti $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\varphi$ konstantou $|\vec{a}|$ obdržíte vyjádření $|\vec{b}| \cos\varphi = \vec{b} \cdot \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, takže $\vec{b}_{\vec{a}} = (|\vec{b}| \cos\varphi)\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, tj. $\vec{b}_{\vec{a}} = \vec{b} \cdot (\vec{a}/|\vec{a}|) \cdot (\vec{a}/|\vec{a}|) = (\vec{a} \cdot \vec{b})\, \vec{a}/(\vec{a} \cdot \vec{a})$]. [$\vec{b}_{\vec{a}} = (-4/9, 8/9, 8/9)$]

**2.1.9.** Ověřte, že pro vektory $\vec{a} = (1, 2, 3), \vec{b} = (2, 3, 4), \vec{c} = (3, 4, 5), \vec{d} = (4, 5, 6)$ platí rovnost

$$(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{d} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix}$$

**2.1.10.** Vypočtěte obsah $P$ rovnoběžníku sestrojeného z vektorů $\vec{a} = \vec{u} + 2\vec{v}$, $\vec{b} = \vec{u} - 3\vec{v}$, jestliže $|\vec{u}| = 5$, $|\vec{v}| = 3$ a úhel $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 30°$. [$P = 37{,}5$]

**2.1.11.** Dokažte, že pro tzv. trojný součin vektorů $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, kde $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{E}_3$, platí rovnost

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\, \vec{c}.$$

**2.1.12.** Určete a) obecnou rovnici, b) parametrické rovnice roviny, která je určena třemi body $A[4, 0, 3]$, $B[4, 1, 5]$, $C[1, 2, -3]$. [a) $10x + 6y - 3z - 31 = 0$, b) $x = 4 - 3t$, $y = s + 2t$, $z = 3 + 2s - 6t$, $s, t \in \mathbb{R}$]

**2.1.13.** Určete obecnou rovnici roviny, která prochází bodem $A[2, 1, -2]$ a je rovnoběžná s vektory $\vec{a} = (3, 2, 4)$, $\vec{b} = (3, 5, 2)$. [$16x - 6y - 9z - 44 = 0$]

**2.1.14.** Určete a) parametrickou rovnici, b) kanonickou rovnici přímky, která prochází bodem $A[-6, 3, 4]$ a je rovnoběžná s přímkou, která je průsečnicí rovin $x - 2y - 3z + 7 = 0$ a $4x + 5y - z - 9 = 0$. [a) $x = -6 + 17t$, $y = 3 - 11t$, $z = 4 + 13t$, $t \in \mathbb{R}$, $(x + 6)/17 = (y - 3)/(-11) = (z - 4)/13$]

**2.1.15.** Určete kolmý průmět $Q$ bodu $A[8, 2, 1]$ do roviny $\rho\colon 3x - 4y + z + 9 = 0$. [$Q[5, 6, 0]$]

**2.1.16.** V trojúhelníku $ABC$, kde $A[4, 2, -2], B[2, 4, 0], C[2, 0, 2]$, určete velikost strany $a$, úhlu $\alpha$, rovnici těžnice $t_a$, výšky $v_a$, vzdálenost vrcholu $A$ od strany $a$ a plochu trojúhelníka $ABC$. [$|a| = 2\sqrt{5}, \alpha \doteq 61°52'$, $t_a\colon (x = 4 - 2t, y = 2, z = -2 + 3t), v_a\colon (x = 4 + 5u, y = 2 - 3u, z = -2 - 6u), d(A, a) = 2\sqrt{70}/5, P = 2\sqrt{14}$]

**2.1.17.** Ve čtyřstěnu $ABCD$, kde $A, B, C$ jsou body z předchozího příkladu a $D[4, 4, 4]$, určete rovnici stěny $ABC$, vzdálenost vrcholu $D$ od stěny $ABC$, úhel hrany $AD$ a stěny $ABC$, úhel stěn $ABC$ a $ABD$ a objem čtyřstěnu $ABCD$. [$ABC\colon 3x + y + 2z - 10 = 0, d(D, ABC) = \sqrt{14}, \varphi \doteq 36°16', \omega = 60°, V = \frac{28}{3}$]

**2.1.18.** Vrcholy čtyřstěnu ABCD mají souřadnice $A[2, -1, 1]$, $B[4, 1, -9]$, $C[3, -2, 4]$, $D[14, 11, -5]$. Určete úhel $\alpha$ hrany $AD$ se stěnou $ABC$. [$\alpha = 45°$]

**2.1.19.** Určete souřadnice bodu $Q$, který je souměrný s bodem $P[4, 1, -3]$ podle přímky $p \equiv AB$, kde $A[3, -2, 2]$, $B[4, 1, 4]$. [$Q[2, -5, 7]$]

**2.1.20.** Určete vzdálenost $d$ bodu $A[-2, 4, 3]$ od přímky $p : \{x - 2y - z + 8 = 0,\ x + y - z + 2 = 0\}$. [$d = 3\sqrt{2}$]

# DOMÁCÍ ÚKOLY – DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCE DVOU A VÍCE PROMĚNNÝCH

Určete definiční obor funkce $z = f(x,y)$, znázorněte její vrstevnice a vypočtěte parciální derivace $z_x$, $z_y$:

**2.2.1.** $z = \sqrt{\frac{4-x^2}{x^2+y^2-9}}$ [část pásu kolmého na osu $x$, elipsy, $z_x = \frac{x(5-y^2)}{\sqrt{4-x^2}\sqrt{x^2+y^2-9}^3}$, $z_y = \frac{y\sqrt{x^2+y^2-9}}{\sqrt{4-x^2}^3}$]

**2.2.2.** $z = \arcsin 2xy$ [část roviny mezi hyperbolami, rovnoosé hyperboly, $z_x = \frac{2y}{\sqrt{1-4x^2y^2}}$, $z_y = \frac{2y}{\sqrt{1-4x^2y^2}}$]

**2.2.3.** $z = \ln \frac{\cos y}{x}$ [sjednocení polopásů kolmých na osu $y$, kosinusoidy, $z_x = \frac{-1}{x}$, $z_y = -\tan x$]

**2.2.4.** Vypočtěte $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$. $\langle$použijte transformaci do polárních souřadnic, vztah $A^B = e^{B\ln A}$ a l'Hospitalovo pravidlo$\rangle$ [1]

**2.2.5.** Ukažte, že neexistuje limita $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{yx^4}{y^3+x^6}$. $\langle$použijte přímky a paraboly$\rangle$

**2.2.6.** Rozhodněte o spojitosti funkce $f(x,y)$ v bodě $[0,0]$, je-li dána vztahem
$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$, pro $x \neq 0, y \neq 0$; $f(x,y) = 0$, pro $[x,y] = [0,0]$. [funkce je nespojitá v bodě $[0,0]$]

**2.2.7.** Dokažte, že funkce $z = \ln(e^x + e^y)$ je řešením parc. dif. rovnic $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ a $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y})^2 = 0$.

**2.2.8.** Určete derivace $z_x$ a $z_y$ složené funkce $z = \arctan \frac{u}{v}$, $u = x\sin y$, $v = x\cos y$. [$z_x = 0, z_y = 1$]

**2.2.9.** Rovnici $z_{xx} + 2z_{xy} + 2z_{yy} = 0$ transformujte do proměnných $u = y - x$ a $v = x$. [$z_{uu} + z_{vv} = 0$]

**2.2.10.** Pomocí totál. diferenciálu odhadněte abs. chybu $\Delta T$ doby kmitu $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ matematického kyvadla, kde délka kyvadla $l$ je změřena s chybou $\Delta l$ a gravitační zrychlení $g$ s chybou $\Delta g$. [$\Delta T \approx \frac{\pi}{\sqrt{gl}} \frac{g\Delta l - l\Delta g}{g}$]

**2.2.11.** Pomocí totálního diferenciálu vypočtěte přibližnou hodnotu výrazu $z = \arcsin \frac{0{,}98}{2{,}06}$. [$z \doteq 0{,}4947$]

**2.2.12.** Pomocí Taylorova rozvoje ukažte, že platí vztah: $4\arctan \frac{1+x}{1-y} \doteq \pi + 2(x+y) + y^2 - x^2$.

Určete lokální extrémy funkce $z = f(x,y)$:

**2.2.13.** $z = x\ln(x^2+y^2)$ [v bodě $[-\frac{1}{e}, 0]$ je $z_{max} = \frac{2}{e}$, v bodě $[\frac{1}{e}, 0]$ je $z_{min} = -\frac{2}{e}$]

**2.2.14.** $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ $\langle$ v bodě $[0,0]$ extrém neexistuje – porovnejte chování funkce např. na ose $x$ a na přímce $y = x\rangle$ [ v bodech $[\sqrt{2}, -\sqrt{2}], [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ je $z_{min} = -8$]

Určete nejmenší a největší hodnotu funkce $z = f(x,y)$ na uzavřené oblasti $M$:

**2.2.15.** $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$, $M: x \geq 0, y \geq 0, y \leq 3 - x$ [v bodě $[0,3]$ je $z_{min} = -19$, v bodě $[0,0]$ je $z_{max} = -1$]

**2.2.16.** $z = x^2 - y^2$, $M: x^2 + y^2 \leq 4$ $\langle$pro vyšetřování funkce na hraniční křivce lze použít transformaci do polárních souřadnic$\rangle$ [v bodech $[0, \pm 2]$ je $z_{min} = -4$, v bodech $[\pm 2, 0]$ je $z_{max} = 4$]

**2.2.17.** Určete $f'(x), f''(x)$ pro fci danou implicitně rovnicí $xy + \ln y + \ln x = 0$. [$f'(x) = -\frac{y}{x}, f''(x) = \frac{2y}{x^2}$]

**2.2.18.** Napište rovnici tečné roviny $\tau$ a normály $n$ v bodě $[?, 3, 0]$ k ploše dané parametricky rovnicí $\vec{r} = (u^2 - 3v^2)\vec{i} + (2u - v)\vec{j} + (2v - u)\vec{k}$. [$\tau: 3x - 2y + 8z + 3 = 0$, $n: \frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{8}$]

**2.2.19.** Napište rovnici tečny $t$ a normálové roviny $\rho$ ke křivce dané jako průsečnice ploch $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y = 4$ v bodě $[2, ?, ?]$. [$t: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z-4}{4}$, $\rho: x - 4y + 4z - 18 = 0$]

**2.2.20.** Určete druh kvadratické plochy, souřadnice středu (vrcholu) a parametry (poloosy, poloměr), je-li zadána rovnicí $\lambda(2x^2 + y^2) + z^2 - x^2 + 4z - 2y = 0$, kde parametr $\lambda \in \{0, 1, -1, -\frac{1}{2}\}$. [hyperbolický paraboloid: $V[0,-2,-2], 1, 1$; kulová plocha: $S[0,1,-2], 2\sqrt{2}$; kuželová plocha: $V[0,-1,-2], \frac{\sqrt{3}}{3}, 1, 1$; jednodílný hyperboloid: $S[0,-2,-2], \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 2]$.

# DOMÁCÍ ÚKOLY – OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

**2.3.1.** Sestavte diferenciální rovnici nejnižšího řádu, aby jejím řešením byly funkce $y = \frac{1}{1-Cx}, Cx \neq 1, C \in \mathbf{R}$. $\langle$derivujte funkci podle $x$ a dosaďte za konstantu $C\rangle$ $[y' = \frac{y}{x}(y-1)]$

**2.3.2.** Separací proměnných určete obecné řešení rovnice $xyy' + 4 - y^2 = 0$ a znázorněte partikulární řešení procházející bodem $B[-2,-4]$. $[y = \pm\sqrt{Cx^2+4}, Cx^2+4 > 0, x \neq 0$; hyperbola $y = -\sqrt{3x^2+4}]$

**2.3.3.** Substitucí $u = \frac{y}{x}$ řešte rovnici s homogenní fcí $(xy'-y)\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = x,\ y(1) = 0.$ $[\ln(x^2+y^2) = 2\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}]$

**2.3.4.** Substitucí $u = 2x + y$ určete obecné řešení rovnice $y' = \frac{2x+y-1}{2(2x+y)+5}$. $[10y - 5x + 7\ln|10x+5y+9| = C]$

**2.3.5.** Substitucemi $u = x-5,\ v = y-1$ a poté substitucí $z = \frac{v}{u}$ určete obecné řešení rovnice $y' = \frac{2x-y+9}{x-3y+2}$.
$[2(x+5)^2 - 2(x+5)(y+1) + 3(y+1)^2 = C]$

**2.3.6.** Určete řešení Bernoulliovy diferenciální rovnice $y' - xy = -y^3\mathrm{e}^{-x^2}$. $[y^2 = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x+C}]$

**2.3.7.** Určete obecné řešení exaktní rovnice $(2x + y\cos xy\mathrm{e}^{\sin xy})\mathrm{d}x + x\cos xy\mathrm{e}^{\sin xy}\mathrm{d}y = 0$. $\langle$při integraci užijte substituci $t = \sin xy\rangle$ $[\mathrm{e}^{\sin xy} + x^2 = C]$

**2.3.8.** Metodou variace konstanty určete part. řešení lineární rovnice $y'\cos x - y\sin x = 1,\ y(\pi) = -2\pi$. $[y = \frac{\pi+x}{\cos x}]$

**2.3.9.** Metodou variace konstanty řešte Cauchyovu úlohu $y' = x^3 - 2xy,\ y(0) = 1$. $\langle$při integraci užijte substituci $t = x^2\rangle$ $[y = \frac{1}{2}(x^2 - 1 + 3\mathrm{e}^{-x^2})]$

**2.3.10.** Rychlost ochlazování tělesa vzduchem je přímo úměrná rozdílu teploty tělesa a teploty vzduchu. Najděte závislost teploty $T$ tělesa na čase $t$, je-li teplota vzduchu 20°C a těleso se za 1200 s ochladí ze 100°C na 60°C. Za jak dlouho se ochladí na 30°C? $\langle$řešte rovnici $\frac{dT}{dt} = k(T-20), T(0) = 100, T(1200) = 60\rangle$ $[T(t) = 20 + 80.2^{-\frac{t}{1200}}$, pro $T = 30$°C je $t = 3600$ s]

**2.3.11.** Projektil o hmotnosti $m$ je vystřelen kolmo vzhůru z povrchu Země. Jakou počáteční rychlost $v_0$ musí mít, aby opustil gravitační pole Země? Předpokládejte, že na projektil působí pouze gravitační síla $F = -\frac{km}{x^2}$, kde $k$ je konstanta, $x$ je vzdálenost od středu Země. $\langle ma = -\frac{km}{x^2}, a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$, odtud $\frac{v^2}{2} = \frac{k}{x} + C$; protože $v(6378\text{ km}) = v_0$, dostáváme $C = \frac{v_0^2}{2} - \frac{k}{6{,}378\cdot 10^6}$, tedy $v^2 = \frac{2k}{x} + v_0^2 - \frac{k}{3{,}189\cdot 10^6}$; pro $x \to \infty$ se $v^2 \to v_0^2 - \frac{k}{3{,}189\cdot 10^6}$; pro $k$ na povrchu Země platí $9{,}81 = g = \frac{k}{x_0^2} = \frac{k}{(6{,}378\cdot 10^6)^2}$, pro $v_0$ platí $v^2 > 0$, tj. $v_0^2 > \frac{k}{3{,}189\cdot 10^6}\rangle$ $[v_0 > 11187\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}]$

**2.3.12.** Určete obecné řešení homogenní rovnice $4y''' - 8y'' + a(y' - 2y) = 0$, kde $a \in \{-1; 1\}$.
[pro $a = -1: y(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + C_3\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$, pro $a = 1: y(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\cos\frac{x}{2} + C_3\sin\frac{x}{2}$]

**2.3.13.** Metodou variace konstant řešte rovnici $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$. $[y = (C_1 - x)\cos x + (C_2 + \ln|\sin x|)\sin x]$

**2.3.14.** Metodou variace konstant řešte rovnici $y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}$. $[y = \mathrm{e}^x(C_1 + C_2x - \ln\sqrt{1+x^2} + x\operatorname{arctg}x)]$

**2.3.15.** Řešte rovnici se speciální pravou stranou $y'' - 4y' + 4y = 2x\mathrm{e}^{2x}$. $[y = (C_1 + C_2x + \frac{x^3}{3})\mathrm{e}^{2x}]$

**2.3.16.** Řešte rovnici $y'' + 5y' - 6y = 3 + \mathrm{e}^x + \sin x$. $[y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-6x} - \frac{1}{2} + \frac{x}{7}\mathrm{e}^x - \frac{1}{74}(5\cos x + 7\sin x)]$

**2.3.17.** Určete přibližnou hodnotu partikulárního řešení rovnice $y' = y^3$ s počáteční podmínkou $y(0) = 0,5$ v bodě $x = 0,6$ s krokem $h = 0,3$. Řešte $a$) Eulerovou metodou, $b$) metodou Rungovou – Kuttovou 4. řádu, $c$) exaktně (separací proměnných) a výsledky porovnejte. [$a$) 0,584; $b$) 0,597; $c$) 0,598]

**2.3.18.** Eliminační metodou řešte soustavu rovnic $y_1' = 4y_1 - 3y_2 + \sin x,\ y_2' = 2y_1 - y_2 - 2\cos x$.
$[y_1 = C_1\mathrm{e}^x + 3C_2\mathrm{e}^{2x} + \cos x - 2\sin x,\ y_2 = C_1\mathrm{e}^x + 2C_2\mathrm{e}^{2x} + 2\cos x - 2\sin x]$

**2.3.19.** Eulerovou metodou (pomocí vlastních čísel a vlastních vektorů) řešte soustavu rovnic
$y_1' = y_1 + y_2,\ y_2' = 8y_1 - y_2, y_1(0) = y_2(0) = 1$. $[y_1 = \frac{5}{6}\mathrm{e}^{3x} + \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-3x},\ y_2 = \frac{5}{3}\mathrm{e}^{3x} - \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-3x}]$

**2.3.20.** Eliminační metodou řešte soustavu rovnic $y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3,\ y_2' = y_1 + y_2 + y_3,\ y_3' = 4y_1 - y_2 + 4y_3$.
$[y_1 = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x} + C_3\mathrm{e}^{5x},\ y_2 = C_1\mathrm{e}^x - 2C_2\mathrm{e}^{2x} + C_3\mathrm{e}^{5x},\ y_3 = -C_1\mathrm{e}^x - 3C_2\mathrm{e}^{2x} + 3C_3\mathrm{e}^{5x}]$

# DOMÁCÍ ÚKOLY – NEKONEČNÉ A MOCNINNÉ ŘADY

Určete součet číselné řady (symbol $\sum$ v textu znamená $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$):

**2.4.1.** $\sum \frac{4}{(n+6)(n+2)}$. $\langle a_1 = \frac{4}{3.7} = \frac{7-3}{3.7} = \frac{1}{3} - \frac{1}{7}, a_2 = \frac{4}{4.8} = \frac{8-4}{4.8} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}, \ldots \rangle$ $[s = \frac{57}{60}]$

**2.4.2.** $\sum (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$. $[s = -1]$

**2.4.3.** $\sum \frac{10+n}{10n}$. $\langle$užijte vztah pro $s_n$ v aritmetické posloupnosti$\rangle$ [$s = \infty$ (řada diverguje)]

**2.4.4.** Zjistěte, zda je splněna nutná podmínka konvergence pro řadu $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \ldots$.
$\langle$užijte l'Hospitalova pravidla$\rangle$ [ano]

**2.4.5.** Určete první dva členy $a_1, a_2$, $n$-tý člen $a_n$ a součet $s$ konvergentní číselné řady, je-li $n$-tý částečný součet $s_n = \frac{(-1)^n}{n}$. $[a_1 = -1, a_2 = \frac{3}{2}, a_n = (-1)^n \frac{2n-1}{n^2-n}, s = 0]$

Pomocí vhodného kritéria rozhodněte o konvergenci číselné řady:

**2.4.6.** $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$. $\langle$srovnávací kritérium$\rangle$ [konverguje absolutně]

**2.4.7.** $\sum \sin \frac{\pi}{2^n}$. $\langle$podílové kritérium, užijte substituci $\alpha = \frac{\pi}{2^{n+1}}\rangle$ [konverguje]

**2.4.8.** $\sum \frac{(\frac{n+1}{n})^{n^2}}{3^n}$. $\langle$odmocninové kritérium$\rangle$ [konverguje]

**2.4.9.** $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$. $\langle$Leibnizovo a srovnávací kritérium$\rangle$ [konverguje relativně]

**2.4.10.** $\sum \frac{\sqrt[n]{\mathrm{e}}}{n^2}$. $\langle$integrální kritérium$\rangle$ [konverguje]

**2.4.11.** Pomocí Raabeova limitního kritéria rozhodněte o konvergenci řady $\sum \frac{\ln n}{n^2}$. [konverguje]

**2.4.12.** Určete, pro která $a > 0$, $b > 0$ konverguje řada $\sum \frac{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)}$. $\langle$podílové kritérium$\rangle$
[pro $a < b$ řada konverguje]

**2.4.13.** Určete, pro která $a > 0$ konverguje řada $\sum \frac{a^n}{\operatorname{arctan}^n n}$. $\langle$odmocninové kritérium$\rangle$
[pro $a \in (0; \frac{\pi}{2})$ řada konverguje]

**2.4.14.** Určete obor konvergence mocninné řady $\sum \frac{(x-3)^n}{n.4^{n-1}}$. $[\langle -1; 7)]$

**2.4.15.** Určete obor konvergence mocninné řady $\sum (-3)^{n-1}(x+2)^{n-1}$. $[(-\frac{7}{3}; -\frac{5}{3})]$

**2.4.16.** Určete obor konvergence a součet mocninné řady $\sum \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{2n-1}$. $[\langle -1; 1\rangle; s(x) = \arctan x]$

**2.4.17.** Určete součet mocninné řady $\sum (-1)^{n+1}(2n-1)x^{2n-2}$. $[s(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}]$

**2.4.18.** Určete Maclaurinovu řadu funkce $\sinh x$ a její obor konvergence. $[\sinh x = \sum \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}; (-\infty; \infty)]$

**2.4.19.** Pomocí mocninné řady vypočtěte integrál $\int_0^x \sin t^2 \, \mathrm{d}t$. $[\sum \frac{(-1)^{n+1}}{(4n-1)(2n-1)!} x^{4n-1}]$

**2.4.20.** Pomocí mocninné řady určete řešení diferenciální rovnice $y''(x) = x^2 y(x); y(0) = 1, y'(0) = 1$.
$[y(x) \approx 1 + x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{672}]$

## DOMÁCÍ ÚKOLY – LIN. PROSTORY, APROXIMACE, FOUR. ŘADY, FOUR. TRANSFORMACE

**2.5.1.** Vypočtěte skalární součin vektorů (funkcí) $\mathbf{x} = x(t) = t\mathrm{e}^{\mathrm{j}4\pi t}$ a $\mathbf{y} = y(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi t}$ z lineárního prostoru $L_2\langle 0, \frac{1}{2}\rangle$. $\left[(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\pi \mathrm{j} - 2}{4\pi^2}\right]$

**2.5.2.** Vypočtěte metriku vektorů (funkcí) $\mathbf{x} = x(t) = t^2$ a $\mathbf{y} = y(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}t}$ z lineárního prostoru $L_2\langle 0, 1\rangle$. $\left[\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{8}{\pi} - \pi + \frac{3\pi^2}{10}}\right]$

**2.5.3.** Určete nejmenší konstantu $b > 0$ tak , aby funkce $f(t) = \cos\frac{\pi}{2}t$ a $g(t) = \sin \pi t$ byly ortogonální v lineárním prostoru $L_2(0, b)$. $[b = 4]$

**2.5.4.** Dokažte, že vektory $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 1)^T, \mathbf{x}_2 = (2, -1 + \sqrt{3}\mathrm{j}, -1 - \sqrt{3}\mathrm{j})^T, \mathbf{x}_3 = (2, -1 - \sqrt{3}\mathrm{j}, -1 + \sqrt{3}\mathrm{j})^T$ tvoří ortogonální bázi v prostoru $\mathbf{C}^3$. Normováním vektorů zkonstruujte ortonormální bázi. $\left[\mathbf{y}_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})^T, \mathbf{y}_2 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{\mathrm{j}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{\mathrm{j}}{2})^T, \mathbf{y}_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{\mathrm{j}}{2}, -1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{\mathrm{j}}{2})^T\right]$

**2.5.5.** Grammovým-Schmidtovým ortogonalizačním procesem ortogonalizujte bázi $e_1(t) = 1 + t$, $e_2(t) = 2 + t^2$, $e_3(t) = t - t^2$ v lineárním prostoru $P_2\langle -1, 1\rangle$ polynomů stupně nejvýše 2. $\left[f_1(t) = e_1(t), f_2(t) = t^2 - \frac{7}{4}t + \frac{1}{4}, f_3(t) = \frac{10}{87}(-344t^2 + 341t + 1)\right]$

**2.5.6.** Metodou nejmenších čtverců aproximujte funkci danou tabulkou

| $t$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(t)$ | 6 | 5 | 2 | 1 | 3 |

polynomem 1. stupně $P_1(t) = a_0 + a_1 t$ $\left[P_1(t) = \frac{131}{37} - \frac{26}{37}t\right]$

**2.5.7.** Určete polynom 2. stupně, který metodou nejmenších čtverců aproximuje funkci $f(t)$ danou tabulkou

| $t$ | 0.78 | 1.56 | 2.34 | 3.12 | 3.81 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(t)$ | 2.50 | 1.20 | 1.12 | 2.25 | 4.28 |

. $\left[P(t) = 1.009t^2 - 4.043t + 5.045\right]$

**2.5.8.** Metodou nejmenších čtverců aproximujte funkci danou tabulkou

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 4 | 13 | 30 |

mocninnou funkcí $y = cx^k$, $c > 0$. ⟨ logaritmováním $y = cx^k$ vznikne $\ln y = \ln c + k \ln x$, tj. $Y(X) = C + kX$, což je polynom 1. stupně ⟩ $\left[y = 0.9x^{2.45}\right]$

**2.5.9.** Určete obraz $F(\omega)$ funkce $f(t) = 2\mathrm{e}^{-\frac{|t|}{2}}$ ve Fourierově transformaci. *(Při výpočtu limity typu* $\lim_{A\to\infty} \mathrm{e}^{(a+\mathrm{j}\omega)A}$ *užijte skutečnosti, že* $\lim_{A\to\infty} \mathrm{e}^{-aA} = 0$ *a* $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega A}$ *je ohraničená funkce.)* $\left[8/(1 + 4\omega^2)\right]$

**2.5.10.** Určete Fourierův obraz $F(\omega)$ signálu $f(t) = \begin{cases} \sin t, \ t \in (-\pi, \pi), \\ 0, \text{ jinde.} \end{cases}$ *(Při integraci i úpravě* $F(\omega)$ *užijte Eulerův vzorec a součtové vzorce.)* $\left[2\mathrm{j} \sin \pi\omega/(\omega^2 - 1)\right]$

**2.5.11.** Určete předmět $f(t)$ k Fourierovu obrazu $F(\omega) = 3^{-2|\omega|}$. *(*$F(\omega)$ *vyjádřete pomocí základu* e*, při výpočtu limity* $\lim_{A\to\infty} \mathrm{e}^{(a+\mathrm{j}\omega)A}$ *užijte skutečnosti, že* $\lim_{A\to\infty} \mathrm{e}^{-aA} = 0$ *a* $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega A}$ *je ohraničená funkce.)* $\left[2\ln 3/[\pi(4\ln^2 3 + t^2)]\right]$

**2.5.12.** Užitím matic. zápisu určete v diskr. Four. transf. obraz posl. $\{1, 2, 3, 4\}$. $\left[\frac{1}{2}\{5, -1 + \mathrm{j}, -1, -1 - \mathrm{j}\}\right]$

**2.5.13.** Užitím maticového zápisu určete v diskrétní Fourierově transformaci amplitudové a fázové spektrum diskrétního signálu $\{\mathrm{j}, 1, 1, \mathrm{j}\}$, tj. určete posloupnosti $\{|F_k|\}$ a $\{\operatorname{Arg} F_k\}$. $\left[\{|F_k|\} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}, \{\operatorname{Arg} F_k\} = \left\{\frac{\pi}{4}, \pi, 0, \frac{\pi}{2}\right\}\right]$

**2.5.14.** Užitím matic. zápisu určete v diskr. Four. transf. předmět k obrazu $\left\{\frac{\mathrm{j}}{2}, \frac{\mathrm{j}}{4}, \frac{\mathrm{j}}{2}, \frac{\mathrm{j}}{4}\right\}$. $\left[\frac{1}{2}\{3\mathrm{j}, 0, \mathrm{j}, 0\}\right]$

**2.5.15.** Určete reálný tvar Fourierovy řady periodické funkce $f(t) = |t| - \frac{\pi}{2}$, $t \in \langle -\pi, \pi)$, s periodou $p = 2\pi$. $\left[f(t) \approx -\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos t}{1^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \ldots\right)\right]$

**2.5.16.** Určete reálný tvar Fourierovy řady periodické funkce $f(t) = t^2$, $t \in \langle 0, 2)$, s periodou $p = 2$. $\left[f(t) \approx \frac{4}{3} + 4(\frac{\cos \pi t}{\pi^2} - \frac{\sin \pi t}{\pi} + \frac{\cos 2\pi t}{2^2\pi^2} - \frac{\sin 2\pi t}{2\pi} + \frac{\cos 3\pi t}{3^2\pi^2} - \frac{\sin 3\pi t}{3\pi} + \cdots)\right]$

**2.5.17.** Určete komplexní tvar Fourierovy řady periodické funkce $f(t) = \pi - |t|$, $t \in \langle -\pi, \pi)$, s periodou $p = 2\pi$. $\left[f(t) \approx \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2k-1)t}}{(2k-1)^2}\right]$

**2.5.18.** Určete komplexní tvar Fourierovy řady periodické funkce $f(t) = |t| - \frac{\pi}{2}$, $t \in \langle -\pi, \pi)$, s periodou $p = 2\pi$. $\left[f(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}kt}, c_0 = 0, c_k = -\frac{2}{k^2\pi}\right]$

**2.5.19.** Funkci $f(t) = \pi - t$, $t \in \langle 0, \pi)$, rozložte do sinové Fourierovy řady. $\left[f(t) \approx 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k}\right]$

**2.5.20.** Funkci $f(t) = t - 2$, $t \in \langle 0, 2)$, rozložte do kosinové Fourierovy řady. $\left[f(t) \approx -2 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)\frac{\pi}{2}t}{(2k-1)^2}\right]$

## DOMÁCÍ ÚKOLY – TEORIE PRAVDĚPODOBNOSTI, ZÁKLADY STATISTIKY

**2.6.1.** Střelec vystřelí třikrát do terče. Pravděpodobnost zásahu při 1. výstřelu je 0.4, při 2. výstřelu 0.5 a při 3. výstřelu 0.7. Určete pravděpodobnost a) právě jednoho zásahu, b) alespoň jednoho zásahu. [a) 0.36, b) 0.91]

**2.6.2.** Házeme šestkrát mincí. Jaká je pravděpodobnost, že padne a) více rubů než líců, b) stejný počet rubů jako líců ? [a) 0.34375, b) 0.3125]

**2.6.3.** Máme tři stejné váčky. V 1. váčku jsou 2 stříbrné a 3 zlaté mince, v 2. váčku jsou 3 stříbrné a 1 zlatá mince, ve 3. váčku jsou 2 stříbrné a 2 zlaté mince. a) Určete pravděpodobnost vytažení stříbrné mince. b) Jestliže byla vytažena zlatá mince, určete pravděpodobnost, že pocházela z 1. váčku. [a) 0.55, b) $0.\overline{4}$]

**2.6.4.** V terénu je rozmístěno pět radiostanic. Vzhledem k atmosférickým poruchám a vzdálenosti od základny je pravděpodobnost navázání spojení základny s libovolnou radiostanicí rovna 0.8. Určete pravděpodobnost, že spojení bude navázáno a) s nejvýše 4 radiostanicemi, b) s alespoň 2 radiostanicemi. [a) 0.67232, b) 0.99328]

**2.6.5.** V krabici jsou tři vadné a sedm dobrých žárovek. Náhodně vybereme tři žárovky. Určete pravděpodobnost, že a) alespoň jednoho žárovka bude dobrá, b) všechny tři žárovky jsou dobré, byla-li první vytažená žárovka dobrá. [a) $0.991\overline{6}$, b) $0.41\overline{6}$]

**2.6.6.** Pravděpodobnost zásahu lodi torpédem je 0.3. Kolik torpéd musí být vypáleno, aby pravděpodobnost a) alespoň jednoho zásahu byla větší než 0.9, b) dvou zásahů byla větší než 0.3 ? [a) $n = 7$, b) $n \in \{5, 6, 7\}$]

**2.6.7.** Pravděpodobnost, že výrobek bude vyhovovat všem technologickým požadavkům, je 0.9. Popište rozdělení počtu nevyhovujících mezi třemi výrobky a) pravděpodobnostní funkcí ve formě tabulky, b) pravděpodobnostní funkcí ve formě matematického vzorce, c) grafem distribuční funkce. [a) 0—0.729, 1—0.243, 2—0.027, 3—0.001]

**2.6.8.** Náhodná proměnná má pravděpodobnostní funkci $P(x) = (3/7) \cdot 0.7^x$ pro $x = 1, 2, 3, \ldots$, $P(x) = 0$ jinak. Jaká je pravděpodobnost, že a) $X > 4$, b) $X \in (1, 4)$ ? [a) 0.2401, b) 0.357]

**2.6.9.** Hustota rozdělení pravděpodobnosti spojité náhodné proměnné $X$ je dána vztahem $f(x) = 1/[a(1 + x^2)]$. a) Určete koeficient $a$, načrtněte graf hustoty. b) Určete pravděpodobnost toho, že náhodná proměnná $X$ nabývá hodnot z intervalu $(-1, 1)$. [a) $a = \pi$, b) 0.5]

**2.6.10.** Hustota rozdělení pravděpodobnosti spojité náhodné proměnné $X$ je dána vztahem $f(x) = 0.5 \cdot e^{-|x|}$. Určete a) střední hodnotu, b) směrodatnou odchylku náhodné proměnné $X$. [a) $E(X) = 0$, b) $\sigma(X) = \sqrt{2}$]

**2.6.11.** Kolikrát je třeba hodit hrací kostkou, aby pravděpodobnost padnutí šestky byla alespoň 0.9 ? [alespoň 13×]

**2.6.12.** Mezi 10 kartami jsou 4 esa. Určete pravděpodobnost, že při jedenácti náhodných výběrech nebude eso vytaženo více než třikrát. [0.1899]

**2.6.13.** V sérii 50 výrobků je 5 zmetků. Ze série jsou náhodně vybrány tři výrobky. Určete zákon rozdělení pravděpodobnosti, střední hodnotu a rozptyl náhodné proměnné $X$ označující počet zmetků ve výběru, jestliže výrobky při kontrole a) vracíme zpět, b) nevracíme zpět. [a) binomické, $E(X) = 0.3$, $D(X) = 0.27$, b) hypergeometrické, $E(X) = 0.3$, $D(X) = 0.259$]

**2.6.14.** Určitá radioaktivní látka vyzařuje průměrně 30 částic $\alpha$ za minutu. Vypočtěte pravděpodobnost, že v průběhu jedné sekundy vyzáří látka více než dvě částice $\alpha$. [0.014388]

**2.6.15.** Spojitá náhodná proměnná $X$ má normální rozdělení $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. S přesností $10^{-2}$ určete pravděpodobnosti náhodných jevů $X \in (\mu, \mu + \sigma)$, $X \in (\mu + \sigma, \mu + 2\sigma)$, $X \in (\mu + 2\sigma, \mu + 3\sigma)$. [0.34, 0.14, 0.02]

**2.6.16.** Výškoměr má systematickou i náhodnou chybu. Systematická chyba je rovna $+20\,m$, náhodné chyby mají normální rozdělení. Jaká může být směrodatná odchylka této chyby, aby s pravděpodobností 0.9 byla chyba změření výšky menší než $100\,m$ ? [N($20,\sigma^2$), $\sigma \doteq 62.4$]

**2.6.17.** V první urně je šest lístků – jeden lístek s číslem 1, dva lístky s číslem 2 a tři lístky s číslem 3. V druhé urně je rovněž šest lístků – dva lístky s číslem 1, tři lístky s číslem 2 a jeden lístek s číslem 3. Označme $X$, resp. $Y$, náhodnou proměnnou označující číslo lístku náhodně vybraného z první urny, resp. z druhé urny. Z každé urny byl vybrán jeden lístek. Sestavte tabulku zákona rozdělení náhodného vektoru $(X, Y)$, určete $E(X)$, $E(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$ a koeficient korelace $r_{xy}$. [$2.\overline{3}$, $1.8\overline{3}$, $0.\overline{5}$, $0.47\overline{2}$, 0]

**2.6.18.** Určitý typ materiálu se třídí podle tvaru na kruhový $(X = 0)$ a oválný $(X = 1)$ a podle váhy na těžký $(Y = 0)$ a na lehký $(Y = 1)$. Jsou dány pravděpodobnosti P(0,0)=0.10, P(0,1)=0.40 a P(1,0)=0.45. Určete kovarianční matici tohoto rozdělení. [$\sigma_{ij} = (0.25, -0.175 \,/\, -0.175, 0.2475)$]

**2.6.19.** Měřením byly získány hodnoty v $mm$: 5.29, 5.32, 5.34, 5.35, 5.36, 5.38, 5.40, 5.41, 5.42, 5.43. Určete variační obor, variační rozpětí, aritmetický průměr a směrodatnou odchylku tohoto souboru. [$\overline{x} = 5.37$, s $\doteq 0.044$]

**2.6.20.** Během 50 dnů byla sledována produkce vybraného provozu vyrábějícího jistý druh výrobků. Byly získány následující údaje (v $ks$): 1430, 1283, 1455, 1385, 1567, 1256, 876, 1678, 1359, 1097, 1240, 963, 1386, 1481, 1437, 1456, 986, 1567, 1468, 1380, 1070, 1211, 1456, 1098, 1156, 1411, 984, 1312, 1481, 1238, 1420, 1530, 1249, 1347, 1245, 1529, 1134, 1413, 1456, 1007, 1324, 1243, 1297, 975, 1387, 1076, 1237, 1431, 1211, 1270. Uvedený statistický soubor roztřiďte, vypočtěte aritmetický průměr a směrodatnou odchylku denní produkce. [$\overline{x} = 1298$, s $\doteq 184.92$]