

Testování statistické hypotézy (stručný přehled)

1. Formulujeme nulovou hypotézu H a k ní alternativní hypotézu \bar{H} .
2. K testování hypotézy H použijeme náhodnou proměnnou T – tzv. *testové kritérium*, které je funkcí náhodného výběru \mathbf{X} . Z datového souboru \mathbf{x} vypočteme její realizovanou hodnotu t .
3. Ke zvolenému číslu α , které se nazývá *hladina významnosti*, určíme tzv. *kritický obor* W_α , v němž se při platnosti hypotézy H realizuje nejvýše $100\alpha\%$ hodnot kritéria T .
4. Když $t \in W_\alpha$, pak *zamítáme* nulovou hypotézu ve prospěch alternativní hypotézy. Když $t \notin W_\alpha$, pak *přijmeme* (nezamítáme) nulovou hypotézu.

Testy o parametru μ rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ (stručný přehled)

Mějme datový soubor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vybraný ze základního souboru s normálním rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$, přičemž parametry μ a σ^2 neznáme. Z datového souboru \mathbf{x} určíme výběrový průměr \bar{x} a výběrovou směrodatnou odchylku s , kde $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $s = \sqrt{s^2}$, $s^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right)$.

Varianty vztahu mezi předpokládanou hodnotou μ a zvoleným μ_0 testujeme pomocí významnosti rozdílu mezi μ_0 a \bar{x} . V následující tabulce jsou tři varianty testů:

H	\bar{H}	kritický obor W_α
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\left\{ t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \sqrt{n}; t \geq t_{1-\alpha}(n-1) \right\}$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\left\{ t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \sqrt{n}; t \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right\}$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\left\{ t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \sqrt{n}; t \leq -t_{1-\alpha}(n-1) \right\}$

Hodnoty $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$, $t_{1-\alpha}(n-1)$ jsou kvantily Studentova rozdělení. Jako testové kritérium užíváme náhodnou proměnnou $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n}$, která má Studentovo rozdělení o $n-1$ stupních volnosti.

Některé kvantily $t_p(k)$ Studentova rozdělení:

$k \backslash p$	0,9	0,95	0,975	0,99
8	1,397	1,860	2,306	2,896
9	1,383	1,833	2,262	2,821
10	1,372	1,812	2,228	2,764
11	1,363	1,796	2,201	2,718

Ukázkový příklad (testy o parametru μ)

Měřením velikosti odpadu u 10 obráběných kusů byly získány tyto hodnoty odpadu materiálu v %: 4,1 4,0 3,8 3,9 3,8 3,8 3,5 3,7 4,0 4,0.

Na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ testujte hypotézu a) $H: \mu \leq 3,9$, b) $H: \mu = 3,8$, c) $H: \mu \geq 4,0$.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{10}(4,1 + 3 \cdot 4,0 + 3,9 + 3 \cdot 3,8 + 3,7 + 3,5) = 3,86, \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{9}(4,1^2 + 3 \cdot 4,0^2 + 3,9^2 + 3 \cdot 3,8^2 + 3,7^2 + 3,5^2 - 10 \cdot 3,86^2) = 0,0315, \quad s = \sqrt{0,0315} \doteq 0,1776.$$

a) $t_{0,95}(9) = 1,833$, $W_\alpha = \langle 1,833, \infty \rangle$, $t = \frac{3,86 - 3,9}{0,1776} \sqrt{10} = -0,7122$, $t \notin W_\alpha \Rightarrow H$ přijmeme.

b) $t_{0,975}(9) = 2,262$, $W_\alpha = (-\infty, -2,262) \cup \langle 2,262, \infty \rangle$, $t = \frac{3,86 - 3,8}{0,1776} \sqrt{10} = 1,0683$, $t \notin W_\alpha \Rightarrow H$ přij.

c) $t_{0,95}(9) = 1,833$, $W_\alpha = (-\infty, -1,833)$, $t = \frac{3,86 - 4}{0,1776} \sqrt{10} = -2,4928$, $t \in W_\alpha \Rightarrow H$ zamítáme.

<p>1. Velikosti týdenní tržby (v tis. Kč) po dobu deseti týdnů v obchodě jsou následující: 52, 50, 49, 53, 46, 51, 50, 55, 56, 48. Na hladině významnosti $\alpha = 0,01$ testujte statistickou hypotézu $H: \mu \leq 51$.</p>	<p>2. Velikosti týdenní tržby (v tis. Kč) po dobu deseti týdnů v obchodě jsou následující: 48, 50, 51, 47, 54, 49, 50, 45, 44, 52. Na hladině významnosti $\alpha = 0,01$ testujte statistickou hypotézu $H: \mu \geq 49$.</p>
<p>3. Velikosti týdenní tržby (v tis. Kč) po dobu devíti týdnů v obchodě jsou následující: 52, 50, 49, 53, 46, 51, 50, 55, 56. Na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ testujte statistickou hypotézu $H: \mu \geq 52$.</p>	<p>4. Velikosti týdenní tržby (v tis. Kč) po dobu devíti týdnů v obchodě jsou následující: 48, 50, 51, 47, 54, 49, 50, 45, 44. Na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ testujte statistickou hypotézu $H: \mu \geq 48$.</p>
<p>5. Velikosti týdenní tržby (v tis. Kč) po dobu dvanácti týdnů v obchodě jsou následující: 61, 58, 57, 59, 60, 52, 62, 63, 61, 65, 67, 64. Na hladině významnosti $\alpha = 0,10$ testujte statistickou hypotézu $H: \mu = 61$.</p>	<p>6. Velikosti týdenní tržby (v tis. Kč) po dobu dvanácti týdnů v obchodě jsou následující: 39, 42, 43, 41, 40, 48, 38, 37, 39, 35, 33, 36. Na hladině významnosti $\alpha = 0,10$ testujte statistickou hypotézu $H: \mu = 39$.</p>
<p>7. Velikosti týdenní tržby (v tis. Kč) po dobu jedenácti týdnů v obchodě jsou následující: 61, 58, 57, 59, 60, 52, 62, 63, 61, 65, 67. Na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ testujte statistickou hypotézu $H: \mu = 62$.</p>	<p>8. Velikosti týdenní tržby (v tis. Kč) po dobu jedenácti týdnů v obchodě jsou následující: 39, 42, 43, 41, 40, 48, 38, 37, 39, 35, 33. Na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ testujte statistickou hypotézu $H: \mu = 38$.</p>
<p>9. Velikosti týdenní tržby (v tis. Kč) po dobu jedenácti týdnů v obchodě jsou následující: 55, 56, 55, 54, 57, 53, 52, 56, 56, 59, 51. Na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ testujte statistickou hypotézu $H: \mu \geq 56$.</p>	<p>10. Velikosti týdenní tržby (v tis. Kč) po dobu jedenácti týdnů v obchodě jsou následující: 45, 44, 45, 46, 43, 47, 48, 44, 44, 41, 49. Na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ testujte statistickou hypotézu $H: \mu \leq 44$.</p>
<p>11. Velikosti týdenní tržby (v tis. Kč) po dobu deseti týdnů v obchodě jsou následující: 55, 56, 55, 54, 57, 53, 52, 56, 56, 59. Na hladině významnosti $\alpha = 0,01$ testujte statistickou hypotézu $H: \mu \leq 57$.</p>	<p>12. Velikosti týdenní tržby (v tis. Kč) po dobu deseti týdnů v obchodě jsou následující: 45, 44, 45, 46, 43, 47, 48, 44, 44, 41. Na hladině významnosti $\alpha = 0,01$ testujte statistickou hypotézu $H: \mu \geq 43$.</p>

<p>13. Velikosti týdenní tržby (v tis. Kč) po dobu devíti týdnů v obchodě jsou následující: 66, 64, 63, 65, 62, 67, 66, 64, 65. Na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ testujte statistickou hypotézu $H: \mu \leq 65$.</p>	<p>14. Velikosti týdenní tržby (v tis. Kč) po dobu devíti týdnů v obchodě jsou následující: 34, 36, 37, 35, 38, 33, 34, 36, 35. Na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ testujte statistickou hypotézu $H: \mu \geq 35$.</p>
<p>15. Velikosti týdenní tržby (v tis. Kč) po dobu deseti týdnů v obchodě jsou následující: 66, 64, 63, 65, 62, 67, 66, 64, 65, 63. Na hladině významnosti $\alpha = 0,01$ testujte statistickou hypotézu $H: \mu \geq 64$.</p>	<p>16. Velikosti týdenní tržby (v tis. Kč) po dobu deseti týdnů v obchodě jsou následující: 34, 36, 37, 35, 38, 33, 34, 36, 35, 37. Na hladině významnosti $\alpha = 0,01$ testujte statistickou hypotézu $H: \mu \leq 36$.</p>
<p>17. Velikosti týdenní tržby (v tis. Kč) po dobu deseti týdnů v obchodě jsou následující: 59, 57, 61, 60, 60, 58, 63, 64, 62, 60. Na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ testujte statistickou hypotézu $H: \mu = 60$.</p>	<p>18. Velikosti týdenní tržby (v tis. Kč) po dobu deseti týdnů v obchodě jsou následující: 41, 43, 39, 40, 40, 42, 37, 36, 38, 40. Na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ testujte statistickou hypotézu $H: \mu = 40$.</p>
<p>19. Velikosti týdenní tržby (v tis. Kč) po dobu devíti týdnů v obchodě jsou následující: 59, 57, 61, 60, 60, 58, 63, 64, 62. Na hladině významnosti $\alpha = 0,10$ testujte statistickou hypotézu $H: \mu = 61$.</p>	<p>20. Velikosti týdenní tržby (v tis. Kč) po dobu devíti týdnů v obchodě jsou následující: 41, 43, 39, 40, 40, 42, 37, 36, 38. Na hladině významnosti $\alpha = 0,10$ testujte statistickou hypotézu $H: \mu = 39$.</p>
<p>21. Velikosti týdenní tržby (v tis. Kč) po dobu dvanácti týdnů v obchodě jsou následující: 63, 64, 59, 62, 61, 60, 58, 63, 59, 60, 61, 64. Na hladině významnosti $\alpha = 0,01$ testujte statistickou hypotézu $H: \mu \geq 61$.</p>	<p>22. Velikosti týdenní tržby (v tis. Kč) po dobu dvanácti týdnů v obchodě jsou následující: 37, 36, 41, 38, 39, 40, 42, 37, 41, 40, 39, 36. Na hladině významnosti $\alpha = 0,01$ testujte statistickou hypotézu $H: \mu \leq 39$.</p>
<p>23. Velikosti týdenní tržby (v tis. Kč) po dobu jedenácti týdnů v obchodě jsou následující: 63, 64, 59, 62, 61, 60, 58, 63, 59, 60, 61. Na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ testujte statistickou hypotézu $H: \mu \leq 62$.</p>	<p>24. Velikosti týdenní tržby (v tis. Kč) po dobu jedenácti týdnů v obchodě jsou následující: 37, 36, 41, 38, 39, 40, 42, 37, 41, 40, 39. Na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ testujte statistickou hypotézu $H: \mu \geq 38$.</p>