

DOMÁCÍ ÚLOHY – MATICE, LINEÁRNÍ ALGEBRA, ANALYTICKÁ GEOMETRIE (BC. STUD.)

1.1.1. Určete matici X tak, aby platilo $A - X = 3B$, kde $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.1.2. Pro matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ vypočtěte výraz $AA^T - A^T A$.

1.1.3. Určete součiny matic AB a BA , kde $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.1.4. Ověřte, že matice $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ je kořenem svého tzv. charakteristického polynomu $x^3 - 7x^2 + 13x - 5$.

[Ověřte rovnost $A^3 - 7A^2 + 13A - 5I = O$, kde I je jednotková a O nulová matice 2. řádu.]

1.1.5. Určete obecný tvar všech matic B , které komutují (jsou zaměnitelné) s maticí $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

1.1.6. Vypočtěte determinant 2. řádu $\begin{vmatrix} \sin \alpha + \sin \beta & \cos \beta + \cos \alpha \\ \cos \beta - \cos \alpha & \sin \alpha - \sin \beta \end{vmatrix}$.

1.1.7. Řešte rovnici $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 2 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$. [Kořeny polynomu 3. stupně určete vytknutím a rozložením na součin.]

1.1.8. Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu rovnic $\begin{array}{l} 4x + 7y + 13 = 0, \\ 5x + 8y + 14 = 0. \end{array}$

1.1.9. Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu rovnic $\begin{array}{l} 2x + 3y + 5z = 10, \\ 3x + 7y + 4z = 3, \\ x + 2y + 2z = 3. \end{array}$

1.1.10. Pomocí Laplaceova rozvoje [determinant nejprve upravte] vypočtěte determinant 4. řádu $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -8 & 5 & 9 & 5 \\ -11 & 7 & 7 & 4 \end{vmatrix}$.

1.1.11. Pomocí Laplaceova rozvoje vypočtěte determinant 5. řádu $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

1.1.12. Převodem na trojúhelníkový tvar vypočtěte determinant n -tého řádu $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$.

Převodem na stupňovitý tvar určete hodnoty h následujících matic:

1.1.13. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$, **1.1.14.** $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$, **1.1.15.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1.16. Určete inverzní matici A^{-1} k matici $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. Použijte: a) adjungovanou matici, b) ekvivalentní úpravy.

1.1.17. Pomocí adjungované matice určete inverzní matici A^{-1} k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

1.1.18. Pomocí ekvivalentních úprav určete inverzní matici A^{-1} k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešte následující maticové rovnice:

1.1.19. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, **1.1.20.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$,

1.1.21. Řešte maticovou rovnici
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}.$$

Gaussovou eliminační metodou řešte nehomogenní systémy rovnic dané v následujících maticových tvarech:

1.1.22.
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array} \right),$$
 1.1.23.
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array} \right),$$
 1.1.24.
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 & 9 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right).$$

1.1.25. Gaussovou eliminační metodou určete řešení systému rovnic v závislosti na parametru λ :
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 14 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & -3 & 3 & \lambda & 7 \end{array} \right).$$

Gaussovou eliminační metodou řešte homogenní systémy rovnic dané v následujících maticových tvarech:

1.1.26.
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -8 & 17 & 11 & 0 \end{array} \right),$$
 1.1.27.
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 9 & 6 & 0 \end{array} \right),$$
 1.1.28.
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Určete první čtyři aproximace vektoru řešení následujících soustav lineárních rovnic, a to a) Jacobiho iterační metodou, b) Gaussovou - Seidelovou iterační metodou [před zahájením iteračního procesu ověřte konvergenci pomocí některé z norem iterační matice, předtím eventuálně vhodně přeskupte jednotlivé rovnice; zvolte počáteční vektor $\vec{x}^{(0)} = (0, 0, 0)$, výsledek určete s přesností 10^{-3}]:

1.1.29.
$$\begin{array}{rcl} 4x_1 - x_2 + x_3 & = & 4, \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 & = & 9, \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 & = & 2. \end{array}$$
 1.1.30.
$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 & = & -4, \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 3, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 & = & 1. \end{array}$$

Určete vlastní čísla a vlastní vektory následujících matic:

1.1.31.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$
 1.1.32.
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix},$$
 1.1.33.
$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$
 1.1.34.
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.1.35. Ukažte, že vektory $\vec{e}_1 = (2, 1, -3)$, $\vec{e}_2 = (3, 2, -5)$, $\vec{e}_3 = (1, -1, 1)$ tvoří bázi B 3-rozměrného vektorového prostoru, a určete souřadnice vektorů $\vec{x} = (6, 2, -7)$, $\vec{y} = (3, 3, -7)$ v této bázi.

1.1.36. Ukažte, že polynomy $f_1(t) = t^3 + 2t^2 - t - 2$, $f_2(t) = 2t^3 + 3t^2 - 1$, $f_3(t) = t^3 + 2t^2 + t + 3$, $f_4(t) = t^3 + 3t^2 - t$ tvoří bázi vektorového prostoru polynomů nejvýše třetího stupně, a určete souřadnice polynomu $g(t) = 7t^3 + 14t^2 - t + 2$ v této bázi.

Pro následující vektory \vec{a} a \vec{b} určete skalární součin $\vec{a} \cdot \vec{b}$, úhel $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ obou vektorů, vektorový součin $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ a smíšený součin $\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a})$:

1.1.37. $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$, **1.1.38.** $\vec{a} = (1, 2, -3)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$, **1.1.39.** $\vec{a} = (3, 0, 4)$, $\vec{b} = (2, -1, 1)$

1.1.40. Určete a) obecnou rovnici, b) parametrické rovnice roviny, která je určena třemi body $A[4, 0, 3]$, $B[4, 1, 5]$, $C[1, 2, -3]$.

1.1.41. Určete obecnou rovnici roviny, která prochází bodem $A[2, 1, -2]$ a je rovnoběžná s vektory $\vec{a} = (3, 2, 4)$, $\vec{b} = (3, 5, 2)$.

1.1.42. Určete a) parametrickou rovnici, b) kanonickou rovnici přímky, která prochází bodem $A[-6, 3, 4]$ a je rovnoběžná s přímkou, která je průsečnicí rovin $x - 2y - 3z + 7 = 0$ a $4x + 5y - z - 9 = 0$.

1.1.43. Určete kolmý průmět Q bodu $A[8, 2, 1]$ do roviny $\rho: 3x - 4y + z + 9 = 0$.

1.1.44. Vrcholy čtyřstěnu $ABCD$ mají souřadnice $A[2, -1, 1]$, $B[4, 1, -9]$, $C[3, -2, 4]$, $D[14, 11, -5]$. Určete úhel α hrany AD se stěnou ABC .

1.1.45. Určete souřadnice bodu Q , který je souměrný s bodem $P[4, 1, -3]$ podle přímky $p \equiv AB$, kde $A[3, -2, 2]$, $B[4, 1, 4]$.

1.1.46. Určete vzdálenost d bodu $A[-2, 4, 3]$ od přímky $p: \{x - 2y - z + 8 = 0, x + y - z + 2 = 0\}$.

1.1.47. Dokažte, že bod $A[3, 0]$ leží uvnitř kružnice $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$, a určete rovnici tětiny, jejímž středem je bod A .

1.1.48. Určete plochu P čtyřúhelníka, jehož vrcholy jsou umístěny v ohniscích a ve vrcholech na vedlejší ose elipsy o rovnici $5x^2 + 9y^2 - 30x - 18y + 9 = 0$.

1.1.49. Pomocí invariantů určete druh kuželosečky v obecné poloze o rovnici $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$ a převedte její rovnici na kanonický tvar.

1.1.50. Určete úhel α os kuželosečky se souřadnými osami a souřadnice jejího středu S , má-li kuželosečka v obecné poloze rovnici $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$.

Určete definiční obory a základní vlastnosti (sudá, lichá, ohraničená, prostá a intervaly, ve kterých je funkce rostoucí, resp. klesající) pro následující funkce: **1.2.1.** $f : y = \frac{3}{x^2 - 2}$, **1.2.2.** $g : y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, **1.2.3.** $h : y = \sqrt{\ln \cos x}$.

1.2.4. Utvořte složené funkce $f[g(x)]$ a $g[f(x)]$ a porovnejte jejich definiční obory, je-li $f(x) = \frac{x}{x^2 - 25}$ a $g(x) = 2x - 5$.

Určete konstantu k tak, aby následující funkce měly uvedený obor hodnot:

1.2.5. $f : y = k \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + 2$, $H(f) = \langle 0, 4 \rangle$, **1.2.6.** $g : y = |x - 3| + 2k$, $H(g) = \langle -4, \infty \rangle$.

K následujícím funkcím $f(x)$ určete funkce inverzní $f^{-1}(x)$, definiční obory $D(f^{-1})$, obory hodnot $H(f^{-1})$ a do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí $f(x)$ a $f^{-1}(x)$:

1.2.7. $f(x) = x^2 - 4x$, **1.2.8.** $f(x) = \frac{1}{1-x}$, **1.2.9.** $f(x) = 4 - 3 \ln \frac{x}{2}$, **1.2.10.** $f(x) = 2e^{x-3} + 1$.

Do jednoho obrázku načrtněte grafy následujících funkcí $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$:

1.2.11. $f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = |x + 2|$, $f_3(x) = -2|x + 2|$, $f_4(x) = |x| - 2|x + 2|$,

1.2.12. $f_1(x) = \ln(x - 1)$, $f_2(x) = \ln|x - 1|$, $f_3(x) = |\ln|x - 1||$, $f_4(x) = 2 - |\ln|x - 1||$,

1.2.13. $f_1(x) = \frac{2x+1}{2-x}$, $f_2(x) = \frac{2|x|+1}{2-|x|}$, $f_3(x) = \left|\frac{2|x|+1}{2-|x|}\right|$, $f_4(x) = \left|\frac{2|x|+1}{2-|x|}\right| + 3$,

1.2.14. $f_1(x) = \sin 2x$, $f_2(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$, $f_3(x) = -3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$, $f_4(x) = -3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 3$,

1.2.15. $f_1(x) = \operatorname{arccotg} \frac{x}{2}$, $f_2(x) = 2 \operatorname{arccotg} \frac{x}{2}$, $f_3(x) = 2 \operatorname{arccotg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, $f_4(x) = \left|2 \operatorname{arccotg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$.

K následujícím funkcím $f(x)$ určete funkce inverzní $f^{-1}(x)$, definiční obory $D(f^{-1})$, obory hodnot $H(f^{-1})$ a do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí $f(x)$ a $f^{-1}(x)$:

1.2.16. $f(x) = 3 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2$, **1.2.17.** $f(x) = 3 + 5 \operatorname{arccotg}(x - 1)$, **1.2.18.** $f(x) = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$, **1.2.19.** $f(x) = -3 \arccos \frac{x-1}{2}$.

1.2.20. Určete nejmenší periodu následujících složených goniometrických funkcí:

$f(x) = -\pi \cos \frac{3x}{4}$, $g(x) = 5 \operatorname{cotg}(\pi x)$, $h(x) = 2 \sin 3x + 3 \cos 2x$, $k(x) = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}x - \sin \frac{\pi x}{2}$.

1.2.21. Upravte výraz $\frac{\operatorname{arctg} \sqrt{3}}{\operatorname{arcsin}(-1)} (\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x) \sin(\arccos x)$, kde $x \in (-1, 1)$.

Pomocí vytýkání a Hornerova algoritmu určete rozklad následujících polynomů na součin reálných kořenových činitelů, určete znaménka polynomů a načrtněte jejich přibližné grafy: **1.2.22.** $P(x) = x^5 - x^4 - x + 1$, **1.2.23.** $P(x) = x^5 + 3x^3 - 2x^2 - 6$,

1.2.24. $P(x) = x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 4x$, **1.2.25.** $P(x) = -x^5 + 3x^4 + 13x^3 - 39x^2 - 36x + 108$.

Následující neryze lomené racionální funkce převedte na součet polynomu a zbytek ve tvaru ryze lomené racionální funkce:

1.2.26. $\frac{2x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x}{x^2 + 2x + 3}$, **1.2.27.** $\frac{x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 13x + 6}{x^2 + 3x + 2}$.

Určete rozklad následujících ryze lomených racionálních funkcí na součet parciálních zlomků:

1.2.28. $\frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x^2 + 2x}$, **1.2.29.** $\frac{x + 1}{x^5 + 2x^3 + x}$, **1.2.30.** $\frac{5x^3 - 3x^2 + 12x - 8}{x^4 - 4x^2}$.

Určete znaménka následujících lomených racionálních funkcí a načrtněte jejich přibližné grafy:

1.2.31. $\frac{x^5 - 3x^4 - 81x + 243}{x^2 - x^6}$, **1.2.32.** $\frac{x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 9x + 6}{x^3 - 10x^2 + 33x - 36}$, **1.2.33.** $\frac{x^4 + x^3 - x - 1}{x^4 + x^3 + x + 1}$.

Určete limity následujících funkcí:

1.2.34. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3} \cdot \frac{x^3 + 7x^2 - 21x - 27}{3x^2 - 11x + 6} \right)$, **1.2.35.** $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} \cdot \frac{4x^2 - 5x - 6}{x^4 - 2x^2 - 3x - 2} \right)$, **1.2.36.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}$,

1.2.37. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$, **1.2.38.** $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^{-2} - 3x^{-3}}{3x^{-3} - 4x^{-2}} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) \right)$, **1.2.39.** $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4x}{\sin 3x} \cdot \frac{x - \sin x}{\operatorname{tg} x} \right)$,

1.2.40. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\operatorname{tg}^2 2x}$, **1.2.41.** $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x} \right)^{x+3}$, **1.2.42.** $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 4x)^{\frac{1-x}{x}}$.

1.2.43. Pomocí vzorce $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ vypočtěte limitu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2^x}{x}$.

1.2.44. Pomocí vzorce $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$ vypočtěte limitu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{1 - \cos 4x}}$.

1.2.45. Pomocí vzorce $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ vypočtěte limitu $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \pi) - \cos \pi}{x}$.

Pomocí jednostranných limit dokažte, že neexistují následující limity: **1.2.46.** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1}$, **1.2.47.** $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 1}{9 - x^2}$.

1.2.48. Určete obor spojitosti, body nespojitosti a jejich druh pro funkci $f(x) = \frac{(1-x)^3(x-1)}{x^3 - x^2}$.

Určete body nespojitosti následujících funkcí, načrtněte jejich grafy a určete buď skok, anebo v bodech odstranitelné nespojitosti

funkci vhodně dodefinujte: **1.2.49.** $f(x) = x + \frac{x+1}{|x+1|}$, **1.2.50.** $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$.

1.3.1. Pomocí vzorců pro derivaci součinu, podílu a složené funkce určete 1. a 2. derivaci funkce $y = \sqrt{x} \sin x \cos x$.

1.3.2. Pomocí vzorce pro derivaci funkce $f: y = \sin x$ určete derivaci inverzní funkce $f^{-1}: x = \arcsin y, y \in (-1, 1)$.

1.3.3. Určete úhel φ tečen ke křivce $y = x^2$ s dotykovými body $T_1 = [1/2, 1/4]$ a $T_2 = [-1, 1]$.

Určete 1. derivace následujících složených funkcí:

1.3.4. $y = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x},$ **1.3.5.** $y = \operatorname{arccotg} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}},$ **1.3.6.** $y = \frac{1}{3} \ln \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}},$

1.3.7. $y = \ln \frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2} + 2 \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2},$ **1.3.8.** $y = \sqrt{a^2+x^2} - a \ln \frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x},$ **1.3.9.** $y = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a},$

1.3.10. $y = \operatorname{arccotg} \frac{a}{x} + \ln \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}.$ **1.3.11.** Pomocí Leibnizova pravidla určete n -tou derivaci $y^{(n)}$ funkce $y = e^{ax} x^2$.

Pomocí logaritmického derivování vypočtete 1. derivace následujících funkcí:

1.3.12. $y = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4},$ **1.3.13.** $y = x^{\frac{1}{x}},$ **1.3.14.** $y = x^{\arcsin x},$ **1.3.15.** $y = \frac{(x+1)^2 \sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}.$

Určete 1. derivace $y'(x)$ následujících funkcí daných implicitní rovnicí: **1.3.16.** $x^3 + y^3 - 3axy = 0,$ **1.3.17.** $e^y = x^{x+y}$

L'Hospitalovým pravidlem vypočtete následující limity:

1.3.18. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x},$ **1.3.19.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x},$ **1.3.20.** $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right),$ **1.3.21.** $\lim_{x \rightarrow \infty} (\operatorname{cotg} x)^{\frac{1}{\ln x}}.$

Určete asymptoty bez směrnice a asymptoty se směrnicí následujících funkcí: **1.3.22.** $y = e^{\frac{1}{x}},$ **1.3.23.** $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}.$

Určete lokální extrémy následujících funkcí: **1.3.24.** $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1,$ **1.3.25.** $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}.$

1.3.26. Určete rozměry válce s daným objemem V tak, aby jeho povrch S byl minimální.

1.3.27. Určete úhel výstřelu φ (s horizontální rovinou), pro který je vzdálenost d dopadu střely od místa výstřelu maximální, jestliže byla vystřelena s počáteční rychlostí v_0 a jestliže pro vzdálenost dopadu střely platí vztah $d = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}.$

Určete absolutní extrémy následujících funkcí na daných intervalech:

1.3.28. $y = x^3 - 3x + 3, x \in \langle -3, \frac{3}{2} \rangle$ **1.3.29.** $y = 2 \sin x + \cos 2x \quad x \in \langle 0, 2\pi \rangle.$

1.3.30. Určete inflexní body funkce $y = (x-1)^{\frac{1}{3}}.$

1.3.31. Určete intervaly konvexity a konkavity funkce $y = e^{-x^2}$ (tzv. *Gaussova křivka*).

1.3.32. Určete zrychlení hmotného bodu, který se pohybuje po trajektorii o rovnici $s(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ (*harmonické kmity*).

Vyšetřete průběh následujících funkcí a načrtněte jejich grafy: **1.3.33.** $y = \frac{2x}{1+x^2},$ **1.3.34.** $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1},$

1.3.35. $y = x \ln x,$ **1.3.36.** $y = \frac{e^x}{x},$ **1.3.37.** $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2},$ **1.3.38.** $y = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}.$

1.3.39. Porovnejte diferenci Δy a diferenciál dy funkce $y = 2x^3 - x^2 + 3$ při přechodu od hodnoty $x_0 = 3$ k hodnotě $x_1 = 3.01$.

1.3.40. Pomocí diferenciálu určete přibližnou hodnotu výrazu $V = \sqrt[3]{0.988} + \sin 31^\circ.$

1.3.41. Opakovanými měřeními byl zjištěn průměr kruhu $d \doteq (67.0 \pm 0.3)$ cm. Určete absolutní a relativní chybu, která vznikne při výpočtu plochy S takto zadaného kruhu.

1.3.42. Pomocí diferenciálu ukažte, že pro $\Delta x \rightarrow 0$ platí přibližná rovnost $(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x.$

1.3.43. Vyloučením parametru t určete, jaká křivka je dána parametrickými rovnicemi $x = 2 + 3 \cos t, y = 4 \sin t - 3, t \in \mathbf{R}.$

1.3.44. Určete směrnici tečny k cykloidě o parametrických rovnicích $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ v libovolném bodě $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a v bodě $t = \frac{\pi}{2}.$

Určete 1. derivace $y'(x)$ následujících funkcí daných parametrickými rovnicemi:

1.3.45. $x = 2 \cos t - \cos 2t, y = 2 \sin t - \sin 2t,$ **1.3.46.** $x = \frac{1-t}{1+t}, y = \frac{2t}{1+t},$ **1.3.47.** $x = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}, y = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}.$

1.3.48. Napište rozvoj polynomu $P(x) = x^5 + 2x^4 - x^2 + x + 1$ do Taylorovy řady v okolí bodu $x = -1$, tj. zapište polynom $P(x)$ pomocí mocnin dvojčlenu $x + 1$.

1.3.49. Napište Taylorův polynom 3. stupně pro funkci $y = \sqrt{x}$ v okolí bodu $x = 1$.

1.3.50. Napište první tři členy Maclaurinova rozvoje funkce $y = \sinh x$.

Pomocí algebraických úprav a základních integračních vzorců vypočtěte následující integrály:

$$\begin{array}{llll}
 \text{1.4.1.} \int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx, & \text{1.4.2.} \int \left(x - \frac{1}{x}\right)^4 dx, & \text{1.4.3.} \int \frac{(2^{3x} - 3^{2x})^2}{6^x} dx, & \text{1.4.4.} \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\
 \text{1.4.5.} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx, & \text{1.4.6.} \int_0^{\pi/3} \operatorname{tg} x dx. & &
 \end{array}$$

Pomocí substituční metody vypočtěte následující integrály:

$$\begin{array}{llll}
 \text{1.4.7.} \int \frac{\operatorname{arccotg} x}{1+x^2} dx, & \text{1.4.8.} \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dx, & \text{1.4.9.} \int \frac{dx}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x}, & \text{1.4.10.} \int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}, \\
 \text{1.4.11.} \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}, & \text{1.4.12.} \int_1^4 \frac{x dx}{\sqrt{2+4x}}, & \text{1.4.13.} \int_{3/4}^{4/3} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}, & \text{1.4.14.} \int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx.
 \end{array}$$

Pomocí metody per partes vypočtěte následující integrály:

$$\begin{array}{llll}
 \text{1.4.15.} \int (x^2 + 7x - 5) \cos 2x dx, & \text{1.4.16.} \int x \cos^2 x dx, & \text{1.4.17.} \int \ln(1-x) dx, & \text{1.4.18.} \int x \arcsin x dx, \\
 \text{1.4.19.} \int e^{ax} \cos bx dx, & \text{1.4.20.} \int_0^{\pi/4} x^2 \sin 2x dx, & \text{1.4.21.} \int_0^1 x^2 e^{2x} dx, & \text{1.4.22.} \int_1^{10} \log_{10} x dx.
 \end{array}$$

Vypočtěte následující integrály racionálně lomené funkce:

$$\text{1.4.23.} \int \frac{x+3}{x^2-2x-5} dx, \quad \text{1.4.24.} \int \frac{x}{x^3-x^2+x-1} dx, \quad \text{1.4.25.} \int \frac{4}{x^4+1} dx, \quad \text{1.4.26.} \int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} dx.$$

Vypočtěte následující integrály goniometrických funkcí:

$$\begin{array}{ll}
 \text{1.4.27.} \int \sin 5x \sin 3x dx \text{ (použijte součtový vzorec } \cos(\alpha+\beta) = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \text{)}, & \text{1.4.28.} \int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x} dx, \\
 \text{1.4.29.} \int \sin^4 x dx \text{ (užijte vzorec } \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \text{)}, & \text{1.4.30.} \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx, \quad \text{1.4.31.} \int \frac{dx}{4-5 \sin x}, \quad \text{1.4.32.} \int \frac{dx}{(1+\cos x)^2}.
 \end{array}$$

Vypočtěte následující integrály iracionálních funkcí:

$$\begin{array}{llll}
 \text{1.4.33.} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^3+1}} dx, & \text{1.4.34.} \int \frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}} dx, & \text{1.4.35.} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}, & \text{1.4.36.} \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}, \\
 \text{1.4.37.} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x^2})} \text{ (binomický integrál)}, & \text{1.4.38.} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \text{ (binomický integrál)}. & &
 \end{array}$$

1.4.39. Vypočtěte určitý integrál $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ pomocí a) obdélníkové metody (s využitím levých bodů), b) lichoběžníkové metody, c) Simpsonova pravidla. Krok h volte $h = 0.1$.

1.4.40. Pomocí Simpsonova pravidla aplikovaného na rovnost $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ vypočtěte přibližnou hodnotu čísla π (počet subintervalů n volte $n = 10$).

1.4.41. Pomocí Simpsonova pravidla (volte $n = 10$) vypočtěte určitý integrál $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx$.

Vypočtěte následující nevlastní integrály (u příkladů 1.4.44. a 1.4.45. rozhodněte o konvergenci pomocí srovnávacího kritéria):

$$\text{1.4.42.} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \text{1.4.43.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} dx, \quad \text{1.4.44.} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)} dx, \quad \text{1.4.45.} \int_1^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx.$$

1.4.46. Vypočtěte obsah plochy ohraničené elipsou o poloosách a, b .

1.4.47. Vypočtěte obsah plochy mezi osou x a obloukem cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

1.4.48. Vypočtěte délku asteroidy (hypocykloidy) $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

1.4.49. Vypočtěte objem anuloidu vytvořeného rotací kruhu $x^2 + (y-b)^2 = a^2$, $b \geq a$, kolem osy x .

1.4.50. Vypočtěte povrch kužele vytvořeného rotací úsečky $y = 2x$, $x \in \langle 0, 2 \rangle$, kolem osy y .

DÍLČÍ VÝSLEDKY – MATICE, LINEÁRNÍ ALGEBRA, ANALYTICKÁ GEOMETRIE

- 1.1.1.** $X = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 5 \\ -12 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, **1.1.2.** $AA^T - A^T A = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, **1.1.3.** $BA = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$,
 $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, **1.1.5.** $B = \begin{pmatrix} a & 3b \\ -5b & a+9b \end{pmatrix}$, kde $a, b \in \mathbf{R}$, **1.1.6.** 0, **1.1.7.** $x_1 = x_2 = 1, x_3 = -1$, **1.1.8.** $x = 2, y = -3$, **1.1.9.** $x = 3, y = -2, z = 2$, **1.1.10.** -12 , **1.1.11.** -11 , **1.1.12.** $2n+1$, **1.1.13.** $h = 2$, **1.1.14.** $h = 2$, **1.1.15.** $h = 4$, **1.1.16.** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, **1.1.17.** $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & -6 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, **1.1.18.** $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,
1.1.19. $X = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, **1.1.20.** $X = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, **1.1.21.** $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, **1.1.22.** $x_1 = x_2 = 1, x_3 = x_4 = -1$,
1.1.23. $x_1 = \frac{p-9q-2}{11}, x_2 = \frac{-5p+q+10}{11}, x_3 = p, x_4 = q$, **1.1.24.** $x_1 = p, x_2 = q, x_3 = -1-8p+4q, x_4 = 0, x_5 = 1+2p-q$,
1.1.25. pro $\lambda = 1$ systém nemá řešení, pro $\lambda \neq 1$ je řešení tvaru $x_1 = \frac{43-8\lambda}{8-8\lambda} - \frac{9p}{8}, x_2 = \frac{5}{4-4\lambda} + \frac{p}{4}, x_3 = p, x_4 = \frac{5}{\lambda-1}$,
1.1.26. $x_1 = p, x_2 = q, x_3 = -\frac{5p}{2} + 5q, x_4 = \frac{7p}{2} - 7q$, **1.1.27.** $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, **1.1.28.** $x_1 = 2p, x_2 = -p, x_3 = p, x_4 = 2p$, **1.1.29.** a) $\bar{x}^{(4)} \doteq (0.956, 0.968, 0.968)$, b) $\bar{x}^{(4)} \doteq (1.002, 1, 1)$, **1.1.30.** a) $\bar{x}^{(4)} \doteq (1.019, 0.066, -1.019)$, b) $\bar{x}^{(4)} \doteq (0.974, 0.014, -0.999)$, **1.1.31.** $\lambda_1 = 1, \bar{x}_1 = (1, -1)^T, \lambda_2 = 3, \bar{x}_2 = (1, 1)^T$, **1.1.32.** $\lambda_1 = 7, \bar{x}_1 = (1, 1)^T, \lambda_2 = -2, \bar{x}_2 = (4, -5)^T$, **1.1.33.** $\lambda_1 = 1, \bar{x}_1 = (1, 1, 1)^T, \lambda_2 = 2, \bar{x}_2 = (1, 0, 1)^T, \lambda_3 = 3, \bar{x}_3 = (1, 1, 0)^T$, **1.1.34.** $\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = (0, 1, -1)^T, \lambda_3 = 6, \bar{x}_3 = (3, 4, -2)^T$, **1.1.35.** $\bar{x}_B = (1, 1, 1), \bar{y}_B = (2, 0, -1)$, **1.1.36.** $g_B(t) = 2t^2 + t + 2$, **1.1.37.** $0, 90^\circ, (0, 0, -5), -25$, **1.1.38.** $-1, 100^\circ 53', (5, -1, 1), 27$, **1.1.39.** $10, 35^\circ 15', (4, 5, -3), 50$, **1.1.40.** a) $10x+6y-3z-31=0$, b) $x = 4-3t, y = s+2t, z = 3+2s-6t, s, t \in \mathbf{R}$, **1.1.41.** $16x-6y-9z-44=0$, **1.1.42.** a) $x = -6+17t, y = 3-11t, z = 4+13t, t \in \mathbf{R}$, b) $\frac{x+6}{17} = \frac{y-3}{-11} = \frac{z-4}{13}$, **1.1.43.** $Q[5, 6, 0]$, **1.1.44.** $\alpha = 45^\circ$, **1.1.45.** $Q[2, -5, 7]$, **1.1.46.** $d = 3\sqrt{2}$,
1.1.47. $x+y-3=0$, **1.1.48.** $P = 4\sqrt{5}$, **1.1.49.** hyperbola, $2\bar{x}^2 - \bar{y}^2 - 1 = 0$, **1.1.50.** $\alpha = 45^\circ, S[-1, 1]$.

DÍLČÍ VÝSLEDKY – REÁLNÁ FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ, LIMITA

- 1.2.1.** $D(f) = \mathbf{R} - \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$, sudá, rostoucí na $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, 0)$, **1.2.2.** $D(f) = \mathbf{R} - \langle -1, 0 \rangle$, zdola ohraničená, prostá, rostoucí na $D(f)$, **1.2.3.** $D(f) = \{2k\pi; k \in \mathbf{Z}\}$, konstantní funkce, **1.2.4.** $f[g(x)] = \frac{2x-5}{4x^2-20x}, D(f[g]) = \mathbf{R} - \{0; 5\}$,
 $g[f(x)] = \frac{125+2x-5x^2}{x^2-25}, D(f[g]) = \mathbf{R} - \{-5; 5\}$, **1.2.5.** $k = 2$, **1.2.6.** $k = -2$, **1.2.7.** $f^{-1} : y = 2 + \sqrt{4+x}$, **1.2.8.** $f^{-1} : y = \frac{x-1}{x}$, **1.2.9.** $f^{-1} : y = 2e^{\frac{4-x}{3}}$, **1.2.10.** $f^{-1} : y = 3 + \ln \frac{x-1}{2}$, **1.2.16.** $D(f^{-1}) = \langle -5, 1 \rangle, H(f^{-1}) = \langle -\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \rangle$,
 $f^{-1} : y = -\frac{\pi}{3} + \arccos \frac{x+2}{3}$, **1.2.17.** $D(f^{-1}) = \langle 3, 5\pi+3 \rangle, H(f^{-1}) = \mathbf{R}, f^{-1} : y = 1 + \cotg \frac{x-3}{5}$, **1.2.18.** $D(f^{-1}) = \langle -1, 3 \rangle$,
 $H(f^{-1}) = \langle -\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \rangle, f^{-1} : y = \frac{\pi}{6} + \arcsin \frac{x-1}{2}$, **1.2.19.** $D(f^{-1}) = \langle -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \rangle, H(f^{-1}) = \langle -1, 3 \rangle, f^{-1} : y = 1 + 2 \cos \frac{x}{3}$,
1.2.20. $\frac{8\pi}{3}, 5, 2\pi, 4$, **1.2.21.** $-\frac{\pi}{3}\sqrt{1-x^2}$, **1.2.22.** $-(-1) + (1) +$ **1.2.23.** $-(-\sqrt[3]{2}) +$ **1.2.24.** $+(-1) +$ **1.2.25.** $+(-3) - (-2) + (2) -$ **1.2.26.** $2x^2 - 6x + 7 + \frac{7x-21}{x^2+2x+3}$, **1.2.27.** $x^2 + 3x + 2$, **1.2.28.** $\frac{1}{2x} - \frac{2}{x+1} + \frac{5}{2(x+2)}$, **1.2.29.** $\frac{1}{x} + \frac{1-x}{(x^2+1)^2} - \frac{x}{x^2+1}$, **1.2.30.** $\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2x-1}{x^2+4}$, **1.2.31.** $+(-3) - (-1) + (1) -$ **1.2.32.** $-(-2) + (-1) - (4) +$
1.2.33. $+(-1) - (1) +$ **1.2.34.** $\frac{72}{7}$, **1.2.35.** $\frac{44}{21}$, **1.2.36.** 4, **1.2.37.** $\frac{2}{3}$, **1.2.38.** $-\frac{3}{4}$, **1.2.39.** 0, **1.2.40.** $\frac{9}{4}$, **1.2.41.** e^4 , **1.2.42.** e^{-4} , **1.2.43.** $-\ln 2$, **1.2.44.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$, **1.2.45.** 0, **1.2.46.** jednostranné limity jsou $-2, 2$, **1.2.47.** jednostranné limity jsou $-\infty, +\infty$, **1.2.48.** obor spojitosti je $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$, $x = 0$ je bod nespojitosti II. druhu, $x = 1$ je bod nespojitosti I. druhu, **1.2.49.** skok $s = 2$, **1.2.50.** dodefinovat $f(1) = 3$.

DÍLČÍ VÝSLEDKY – DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ

1.3.1. $y' = \frac{\sin 2x}{4\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cos 2x$, **1.3.2.** $\varphi'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, **1.3.3.** $\varphi \doteq 71^\circ 33'$, **1.3.4.** $y' = \frac{1}{\sin^3 x}$, **1.3.5.** $y' = \frac{1}{2}$,
1.3.6. $y' = \frac{1}{x^3 - 1}$, **1.3.7.** $y' = \frac{4\sqrt{2}}{1+x^4}$, **1.3.8.** $y' = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}$, **1.3.9.** $y' = 2\sqrt{a^2-x^2}$, **1.3.10.** $y' = \frac{2a^3}{x^4 - a^4}$,
1.3.11. $y^{(n)} = e^{ax} [a^n x^2 + 2na^{n-1}x + n(n-1)a^{n-2}]$, **1.3.12.** $y' = \frac{-(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4(x+3)^5}$, **1.3.13.** $y' = x^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-\ln x}{x^2} \right)$,
1.3.14. $y' = x^{\arcsin x} \left(\frac{\arcsin x}{x} + \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} \right)$, **1.3.15.** $y' = \frac{(x+1)^2 \sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x} \left(\frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1 \right)$,
1.3.16. $y' = \frac{ay-x^2}{y^2-ax}$, **1.3.17.** $y' = \frac{x(\ln x+1)+y}{x(1-\ln x)}$, **1.3.18.** 3, **1.3.19.** 2, **1.3.20.** $y' = \frac{1}{2}$, **1.3.21.** $y' = \frac{1}{e}$,
1.3.22. $x=0, y=1$, **1.3.23.** $x=0, y=x+2$, **1.3.24.** $x_{\min}=1$, **1.3.25.** $x_{\min}=\frac{2}{5}, x_{\max}=0$, **1.3.26.** $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, v=2r$,
1.3.28. $f(x_{\min}=-3)=-15, f(x_{\max}=-1)=5$, **1.3.29.** $f\left(x_{\min}=\frac{3\pi}{2}\right)=-3, f\left(x_{\max}\in\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}\right)=\frac{3}{2}$, **1.3.27.** $\varphi=\frac{\pi}{4}$,
 $d=\frac{v_0^2}{g}$, **1.3.30.** $x=1$, **1.3.31.** konkávní na $I = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, konvexní na $\mathbf{R} - I$, **1.3.32.** $a(t) = s''(t) = -\omega^2 s(t)$,
1.3.33. mj. $f(x_{\min}=-1)=-1, f(x_{\max}=1)=1$, **1.3.34.** mj. $f(x_{\min}=2)=2, f(x_{\max}=0)=-2$, **1.3.35.** mj.
 $f(x_{\min}=e^{-1})=-e^{-1}$, **1.3.36.** mj. $f(x_{\min}=1)=e$, **1.3.37.** mj. $f(x_{\max}=-3)=-\frac{27}{8}$, **1.3.38.** mj. $f(x_{\min}=0)=0$,
 $f\left(x_{\max}=\frac{4a}{3}\right)=\frac{2a}{3}\sqrt[3]{4}$, **1.3.39.** $\Delta y \doteq 0.4817, dy=0.48$, **1.3.40.** 1.511, **1.3.41.** $\Delta S \doteq 0.3157, \delta S \doteq 0.0089$,
1.3.42. uvažujte funkci $y = x^n$, použijte vztah $\Delta y \doteq dy$ a dosadte $x=1$, **1.3.43.** elipsa $16(x-2)^2 + 9(y+3)^2 = 144$,
1.3.44. $y'_x = \operatorname{cotg} \frac{t}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right)$, $y'_x \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1$, **1.3.45.** $y'_x = \operatorname{tg} \frac{3t}{2}$, **1.3.46.** $y'_x = -1$, **1.3.47.** $y'_x = -\operatorname{tg} 3t$, **1.3.48.**
 $P(x) = (x+1)^5 - 3(x+1)^4 + 2(x+1)^3 + (x+1)^2$, **1.3.49.** $\sqrt{x} \doteq 1 + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{16}$, **1.3.50.** $\sinh x \doteq x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$.

DÍLČÍ VÝSLEDKY – URČITÝ A NEURČITÝ INTEGRÁL

1.4.1. $\frac{x^5}{5} + \frac{3}{4}x^2\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + C$, **1.4.2.** $\frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 + 6x + \frac{4}{x} - \frac{1}{3x^3} + C$, **1.4.3.** $\left(\ln \frac{32}{3}\right)^{-1} \left(\frac{32}{3}\right)^x - \frac{2}{\ln 12} 12^x +$
 $+ \left(\ln \frac{27}{2}\right)^{-1} \left(\frac{27}{2}\right)^x + C$, **1.4.4.** $\frac{\pi}{4}$, **1.4.5.** $\frac{\pi}{4}$, **1.4.6.** $\ln 2$, **1.4.7.** $-\frac{1}{2} \operatorname{arccotg}^2 x + C$, **1.4.8.** $2\sqrt{1+\sin^2 x} + C$,
1.4.9. $\ln |\operatorname{arctg} x| + C$, **1.4.10.** $\arcsin(\ln x) + C$, **1.4.11.** $4\sqrt{1+\sqrt{x}} + C$, **1.4.12.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, **1.4.13.** $\ln \frac{3}{2}$, **1.4.14.** $2(2 - \operatorname{arctg} 2)$,
1.4.15. $(x^2+7x-5)\frac{\sin 2x}{2} + (2x+7)\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + C$, **1.4.16.** $\frac{x^2}{4} + \frac{x \sin 2x}{4} + \frac{\cos 2x}{8} + C$, **1.4.17.** $C - x + (x-1)\ln(1-x)$,
1.4.18. $\frac{1}{4}[(2x^2-1)\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}] + C$, **1.4.19.** $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b \sin bx + a \cos bx) + C$, **1.4.20.** $\frac{\pi-2}{8}$, **1.4.21.** $\frac{e^2-1}{4}$,
1.4.22. $10-9 \log e$, **1.4.23.** $\frac{1}{2} \ln |x^2-2x-5| + \frac{4}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{6}-x+1}{\sqrt{6}+x-1} \right| + C$, **1.4.24.** $-\frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln |x-1| + C$,
1.4.25. $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + C$, **1.4.26.** $\frac{-x-2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \ln |x+1| + C$,
1.4.27. $-\frac{\sin 8x}{16} + \frac{\sin 2x}{4} + C$, **1.4.28.** $\frac{\cos^2 x}{2} - 2 \cos x + 3 \ln |\cos x + 2| + C$, **1.4.29.** $\frac{1}{4} \left(\frac{3x}{2} - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8} \right) + C$,
1.4.30. $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C$, **1.4.31.** $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1} \right| + C$, **1.4.32.** $\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2} + C$, **1.4.33.** $\frac{4}{3} (\sqrt[4]{x^3} - \ln |\sqrt[4]{x^3} + 1|) + C$,
1.4.34. $\frac{2(1-\sqrt{1+x+x^2})}{x} + \ln |2x+2\sqrt{1+x+x^2}+1| + C$, **1.4.35.** $\ln \left| \frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}} \right| + C$, **1.4.36.** $\frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + C$,
1.4.37. $3 \operatorname{arctg} \sqrt[3]{x} + C$, **1.4.38.** $C - \frac{\sqrt{1-x^2}}{3}(x^2+2)$, **1.4.39.** 0.71877, 0.69377, 0.69315, **1.4.40.** 3.14159, **1.4.41.** 1.371,
1.4.42. 1, **1.4.43.** π , **1.4.44.** konverguje, **1.4.45.** diverguje, **1.4.46.** πab , **1.4.47.** $3\pi a^2$, **1.4.48.** $6a$, **1.4.49.** $2\pi^2 a^2 b$,
1.4.50. $4\pi\sqrt{5}$.